



TALES JESUS FERNANDES

**CURVA DE CRESCIMENTO DO FRUTO DO
CAFEEIRO EM DIFERENTES
ALINHAMENTOS DE PLANTIO
UTILIZANDO MODELOS NÃO LINEARES**

LAVRAS - MG

2012

TALES JESUS FERNANDES

**CURVA DE CRESCIMENTO DO FRUTO DO CAFEIEIRO EM
DIFERENTES ALINHAMENTOS DE PLANTIO UTILIZANDO
MODELOS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

Orientador

Dr. Joel Augusto Muniz

Coorientadora

Dra. Taciana Villela Savian

**LAVRAS - MG
2012**

**Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca da UFLA**

Fernandes, Tales Jesus

Curva de crescimento do fruto do cafeeiro em diferentes alinhamentos de plantio utilizando modelos não lineares / Tales Jesus Fernandes. – Lavras : UFLA, 2012.

80 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2012.

Orientador: Joel Augusto Muniz.

Bibliografia.

1. Obatã IAC 1669-20. 2. Heterocedasticidade. 3. Distribuição espacial. 4. Curvatura de Bates e Watts. 5. Autocorrelação. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 519.536

TALES JESUS FERNANDES

**CURVA DE CRESCIMENTO DO FRUTO DO CAFEIEIRO EM
DIFERENTES ALINHAMENTOS DE PLANTIO UTILIZANDO
MODELOS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, área de concentração em Estatística e Experimentação Agropecuária, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 6 de dezembro de 2012.

Dr. José Donizeti Alves

UFLA

Dr. Antônio Policarpo de Souza Carneiro

UFV

Dr. Augusto Ramalho de Moraes

UFLA

Dr. Joel Augusto Muniz
Orientador

**LAVRAS - MG
2012**

Aos meus pais, Iris e Sebastião, pelas palavras de incentivo e confiança.

Ao meu irmão, Waynis, pela admiração e companheirismo.

DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, pois sem Ele nada é possível.

Ao professor Joel Augusto Muniz, pela calma e paciência na orientação e pelas experiências compartilhadas.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agropecuária, pelo conhecimento transmitido e sua contribuição para a minha formação profissional.

Aos professores membros da banca, pois suas sugestões foram de fundamental importância para a realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Lavras, por me propiciar a oportunidade de fazer uma pós-graduação e por oferecer ensino gratuito de qualidade.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de estudos.

À minha noiva, Adriele, por estar ao meu lado em todos os momentos, me dando força e sempre disposta a ajudar.

À minha família, principalmente aos meus pais, pois sempre me apoiaram e incentivaram, obrigado por me prepararem tão bem para a vida. Seu amor, carinho e orações foram essenciais para alcançar mais esta etapa.

“Não conseguimos encontrar respostas para todos os nossos problemas. As que encontramos apenas nos levam a formular novas questões. De certa maneira, sentimo-nos tão confusos quanto antes, mas agora acreditamos que estamos confusos em um nível mais alto e sobre coisas mais importantes.”

Aviso colocado na porta do Departamento de Matemática da
Universidade de Tromso, na Noruega.

RESUMO

As diferentes formas de exposição da planta do cafeeiro ao sol interferem no crescimento e no desenvolvimento do fruto, assim como na sua produção e qualidade final. O conhecimento das curvas de crescimento de frutos permite um melhor manejo da cultura, bem como identificar as épocas de maior demanda de nutrientes. O objetivo deste trabalho foi avaliar as curvas de crescimento do fruto do cafeeiro, considerando três alinhamentos de plantio e as diferentes faces de exposição da planta (norte/sul) em cada alinhamento. Os dados analisados foram obtidos de Cunha e Volpe (2011) e correspondem aos resultados de um experimento conduzido na Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, UNESP, Campus Jaboticabal, SP, com a cultivar Obatã IAC 1669-20, que pertence à espécie *Coffea arabica*. Foram utilizados os modelos não lineares Gompertz e Logístico, considerando uma estrutura de erros autorregressiva AR(1) e heterocedasticidade de variâncias, quando necessários. A estimação dos parâmetros foi feita utilizando-se a função "gnls" do software estatístico R, que utiliza os métodos de mínimos quadrados e o algoritmo de Gauss-Newton para a convergência. Os ajustes foram comparados utilizando-se os seguintes avaliadores: coeficiente de determinação ajustado (R_a^2); critério de informação de Akaike (AIC) e curvaturas de Bates e Watts. Os frutos das diferentes faces de exposição ao sol apresentaram padrão de crescimento diferentes nos três alinhamentos estudados, quanto ao peso máximo e ao índice de maturidade. Os modelos não lineares utilizados descreveram de forma satisfatória o crescimento do fruto do cafeeiro tendo o modelo Gompertz apresentado os melhores ajustes, com base nos avaliadores de qualidade utilizados.

Palavras-chave: Obatã IAC 1669-20. Heterocedasticidade. Autocorrelação. Curvatura de Bates e Watts. Distribuição espacial.

ABSTRACT

The different ways of exposing the coffee plant at sunlight influence the fruit growth and development, as well as their production and final quality. Knowledge of the fruit growth curves allows a better culture management, as well as to identify times of higher demand for nutrients. The aim of this study was to evaluate the growth curves of coffee fruit considering three planting alignments and the different faces of plant (North/South) in each alignment. The data set corresponds to the results of an experiment conducted in the College of Agriculture and Veterinary Sciences, UNESP, Jaboticabal-SP, with the cultivar Obatã IAC 1669-20, which belongs to the species *Coffea Arabica* (CUNHA; VOLPE, 2011). We analysed the data by using nonlinear Gompertz and Logistic models considering auto correlated errors structure AR(1) and heteroscedasticity of variances, when necessary. We estimated the parameters by "gnls" function from the statistical software R, which uses the least squares method and the Gauss-Newton algorithm for convergence. We compared the fit of the models by using the following evaluators: Adjusted Coefficient of Determination (R_a^2); Akaike Information Criterion (AIC) and Bates and Watts curvature. Fruits from different faces exposed to sunlight showed different growth pattern in the three studied alignments, regarding the maximum weight and maturity index. The nonlinear models described fairly the coffee fruit growth whereas the Gompertz model fits better.

Keywords: Obatã IAC 1669-20. Heteroscedasticity. Autocorrelation. Bates and Watts curvature. Space distribution.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	REFERENCIAL TEÓRICO	12
2.1	A cultura do café	12
2.2	Modelos de regressão	16
2.3	Curvas de crescimento	17
2.3.1	Crescimento animal	18
2.3.2	Crescimento de plantas	19
2.3.3	Crescimento de frutos	20
2.3.4	Heterocedasticidade de variâncias	22
2.3.5	Autocorrelação dos resíduos	23
2.4	Modelos de regressão não-linear	25
2.4.1	Modelo Logístico	26
2.4.2	Modelo Gompertz	28
2.4.3	Outros modelos não lineares	30
2.5	O método de mínimos quadrados em regressão não linear	35
2.6	Métodos iterativos	38
2.7	Avaliadores de qualidade de ajuste	39
2.7.1	Coefficiente de determinação ajustado	39
2.7.2	Crítério de Informação de Akaike	40
2.7.3	Curvaturas de Bates e Watts	41
3	MATERIAL E MÉTODOS	43
3.1	Material	43
3.2	Metodologia	44
3.2.1	Modelos ajustados	45
3.2.2	Método de Gauss-Newton	45
3.2.3	Análise de resíduos	47
3.2.4	Intervalos de confiança para os parâmetros	49
3.2.5	Comparação dos modelos	50
3.2.6	Recursos computacionais	51
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	52
4.1	Alinhamento de plantio I - (81° - 261°)	54
4.2	Alinhamento de plantio II - (51° - 231°)	57
4.3	Alinhamento de plantio III - (66° - 246°)	60
4.4	Considerações finais	64
5	CONCLUSÃO	68
	REFERÊNCIAS	69
	ANEXOS	78

1 INTRODUÇÃO

O café é um dos principais produtos da agricultura brasileira, sendo o Brasil o maior produtor mundial de café, respondendo por cerca de 30% das exportações mundiais, além de ser o segundo maior mercado consumidor, atrás apenas dos Estados Unidos. De acordo com o Conselho dos Exportadores de Café do Brasil - CECAFÉ (2012), no ano de 2011 as exportações brasileiras foram recordes, atingindo 33,4 milhões de sacas.

Controlar os aspectos que influenciam a qualidade do produto final do café tem sido cada vez mais o foco de pesquisadores da área aplicada. Apesar de sua importância para a compreensão do desenvolvimento dos frutos, estudos que descrevem detalhadamente as curvas de crescimento dos frutos do cafeeiro por meio de modelos estatísticos não são comuns na literatura.

O estudo de curvas de crescimento de frutos possibilita o manejo mais adequado da cultura, como, por exemplo, conhecer as diferentes fases fenológicas envolvidas em seu desenvolvimento e conhecer a época de maior ganho de massa do fruto bem como a época adequada para a adubação, o controle de pragas e, principalmente, auxiliar na determinação do ponto ótimo de colheita que, geralmente, é determinado de forma subjetiva por meio da coloração externa e tamanho do fruto. Além disso, o estudo de curvas de crescimento via modelos não lineares apresenta uma grande capacidade de sintetização das informações presentes no conjunto de dados, resumindo-as em apenas alguns parâmetros com interpretações práticas.

As diferentes condições ambientais, assim como a distribuição espacial da lavoura, exercem influência direta nas fases reprodutivas do cafeeiro e na qualidade do fruto (ALPIZAR; BERTRAND, 2004; BARBOSA et al., 2010; PEREIRA, 1997). Cada alinhamento de plantio determina diferentes formas de

exposição da planta ao sol, e a incidência de radiação solar nas plantas interfere no crescimento e no desenvolvimento do cafeeiro, chegando ao ponto de as duas faces da planta se comportarem como lavouras diferentes, bem como afeta a produtividade e a qualidade do fruto (BICALHO et al., 2005; CUNHA; VOLPE, 2011; FERNANDES et al., 2001).

Este trabalho foi realizado com o objetivo de descrever as curvas de crescimento dos frutos do cafeeiro, cultivar Obatã IAC 1669-20, com base no acúmulo de massa fresca, em diferentes alinhamentos de plantio e considerando as diferentes faces de incidência solar da planta (norte e sul), utilizando os modelos não lineares Logístico e Gompertz com e sem estrutura de erros autocorrelacionados e heterocedasticidade de variâncias.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção é apresentada uma revisão de literatura sobre a cultura cafeeira, a utilização de curvas de crescimento, os modelos não lineares e a estimação dos parâmetros destes modelos, bem como os avaliadores de qualidade de ajuste.

2.1 A cultura do café

O café é originário das terras altas da Etiópia e chegou ao Brasil, mais precisamente em Belém do Pará, no ano de 1727, trazido da Guiana Francesa, pelo sargento-mor Francisco de Mello Palheta. Como o solo e as condições climáticas de quase todo o país são favoráveis ao cultivo do cafeeiro, a cultura se espalhou por grande parte do nosso território. Em pouco tempo, o café tornou-se a base da economia brasileira no século XIX e na primeira metade do século XX e, ainda hoje, é muito importante para o contexto agrícola do país, gerando milhares de empregos, da produção ao consumo final (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE INDÚSTRIA DO CAFÉ - ABIC, 2012).

Existem muitas espécies do gênero *Coffea* descritas na literatura, porém, apenas duas apresentam importância econômica. São elas: *Coffea arabica* e *Coffea canephora* (conhecida, no Brasil, como café conillon ou robusta). Segundo dados da Companhia Nacional de Abastecimento - CONAB (2012), a área plantada com as espécies *C. arabica* e *C. canephora* (café robusta) no país totaliza 2,351 milhões de hectares. Em Minas Gerais está concentrado o maior parque cafeeiro com 1,208 milhão de hectares predominando a espécie arábica, com aproximadamente, 98% deste total. O café robusta é cultivado em locais com altas temperaturas e longos períodos de estiagem, impróprios para a espécie arábica, sendo o estado do Espírito Santo o maior produtor, com 305,4 mil hectares plan-

tados. Devido à melhor qualidade da bebida, cultivares da espécie *Coffea arabica* são comercializadas a preços mais altos e correspondem a, aproximadamente, 75% do café comercializado no Brasil.

O ciclo produtivo do cafeeiro dura dois anos e passa por diferentes etapas, que são: desenvolvimento da gema floral (G), florada (FL), frutificação (F) e maturação (M), conforme pode ser observado na Figura 1 (MORAIS et al., 2008).

De acordo com Sagio (2009), nos meses de abril a agosto, a planta passa pela preparação das gemas florais, com o desenvolvimento, a maturação e a dormência das mesmas. São as fases G_1 , G_2 da Figura 1. Estando as gemas florais preparadas e após um período de restrição hídrica, seguida de chuva, irrigação ou, até mesmo um aumento significativo da umidade relativa do ar, as gemas entumescem (G_3 , G_4) e os botões florais crescem (G_5). Em seguida, acontece a florada principal, ou antese (RENA; MAESTRI, 1985), como pode ser observado nas fases G_6 e FL da Figura 1. Em condições normais, as flores se abrem pela manhã, começam a murchar no segundo dia e caem no terceiro dia. Em seguida, aparece o fruto (chumbinho), fase que ocorre entre os meses de setembro e dezembro. O fruto do café tem formato ovóide e, geralmente, contém duas sementes, mas podem também ocorrer frutos com apenas uma semente ocupando todo o espaço do ovário, denominados grão moça.

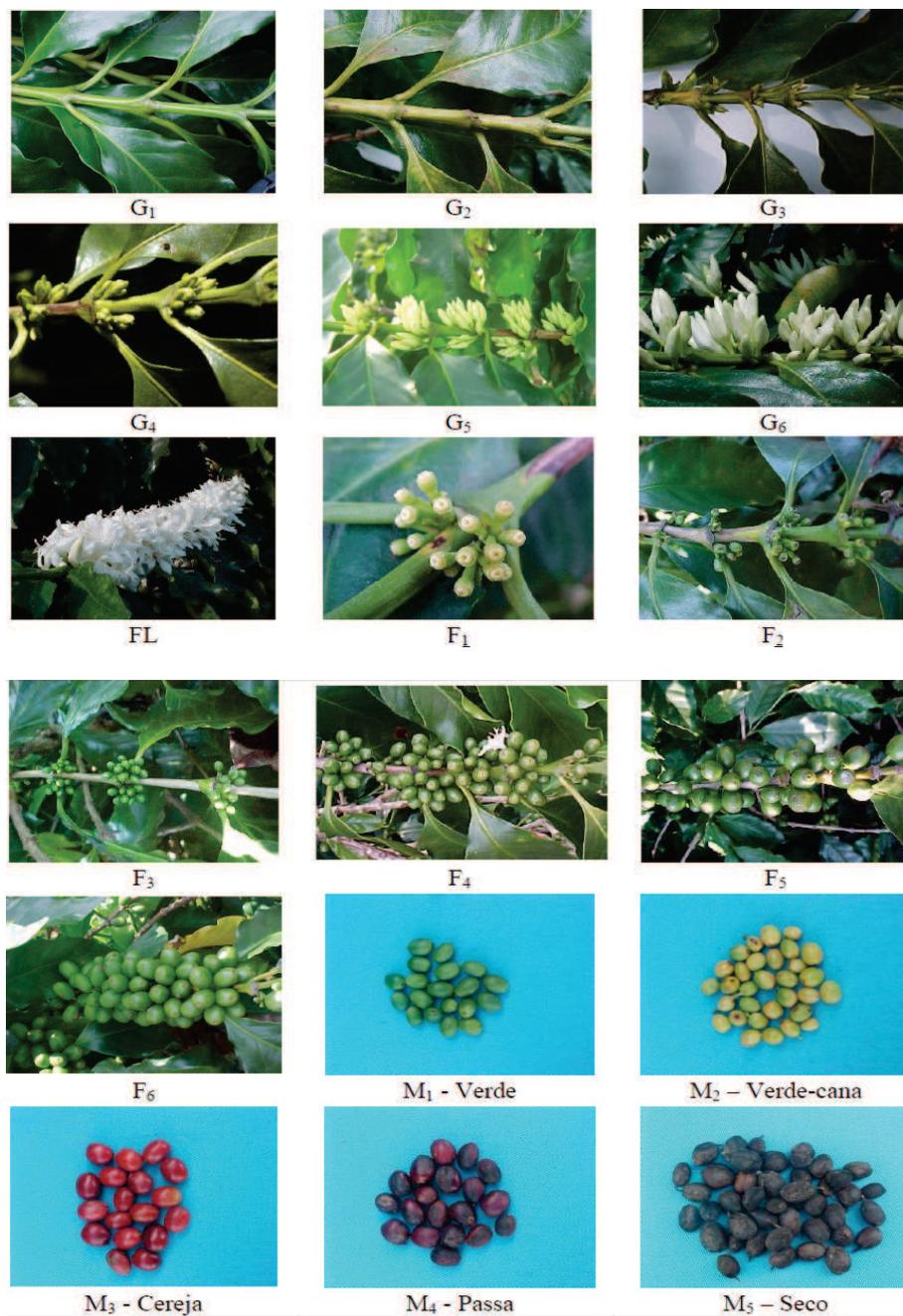


Figura 1 Fases do ciclo produtivo do cafeeiro: germinação (G), florada (FL), frutificação (F) e maturação (M) (MORAIS et al., 2008)

O desenvolvimento dos frutos faz parte do ciclo produtivo do cafeeiro e pode ser dividido em cinco estágios diferentes que são:

- I- **chumbinho** - é um estágio caracterizado pela baixa taxa de crescimento, que ocorre entre 6 a 10 semanas após o florescimento (F_1 e F_2);
- II- **crescimento rápido** - este estágio é caracterizado pela rápida expansão dos frutos, quando ocorre um aumento de tamanho e de massa fresca (F_3 , F_4 e F_5), geralmente, entre os meses de dezembro e janeiro;
- III- **crescimento lento** - neste estágio acontece uma desaceleração do crescimento, que pode se estender por até duas semanas (em geral, na última quinzena de janeiro), na qual o volume final do fruto é atingido, mas a matéria seca ainda é baixa (F_6);
- IV- **granação** - ocorre entre a 17^a e a 28^a semana após o florescimento (geralmente, nos meses de fevereiro e março), quando a matéria seca aumenta regularmente, com uma pequena mudança na matéria fresca (M_1).
- V- **maturação** - é o último estágio. Neste ocorrem aumento da matéria seca e fresca e uma mudança da coloração externa do fruto, se tornando vermelho ou amarelo (M_2 , M_3). A maturação pode se estender por um período de aproximadamente 10 semanas, da 24^a a 34^a semana (geralmente, nos meses de abril a junho). Ao fim deste estágio, o fruto está completamente formado, suas sementes estão prontas e, portanto, ele pode ser colhido (M_3 , M_4 e M_5).

O tempo de duração de cada etapa do ciclo produtivo do cafeeiro pode sofrer variações em função das espécies e, principalmente, das condições climáticas da região, sendo que cada estágio tem funções fisiológicas e metabólicas próprias, essenciais à formação final do fruto (LAVIOLA et al., 2007).

Uma condição ambiental que provoca alterações no desenvolvimento do cafeeiro é a distribuição dos alinhamentos de plantio em relação as orientações dos pontos cardeais. A variação desses alinhamentos provoca diferenças no crescimento vegetativo e no desenvolvimento do fruto, sendo que a face da planta que recebe sol pela manhã tende a apresentar maior produção (BICALHO et al., 2005).

Segundo Cunha e Volpe (2011), atualmente, a cv. Obatã IAC 1669-20 vem sendo plantada por cafeicultores de diversas partes do Brasil, por apresentar porte reduzido, produção elevada, resistência ao fungo causador da ferrugem alaranjada e apresentar maturação tardia, favorecendo o escalonamento da colheita, além de apresentar boa aderência do fruto ao ramo, ou seja, a queda do fruto maduro ou seco é bem reduzida, favorecendo a colheita mecânica.

2.2 Modelos de regressão

Geralmente, em estatística, os pesquisadores se deparam com situações em que precisam estudar a relação entre duas variáveis quantitativas, ou seja, procuram encontrar uma relação que descreva o comportamento de uma variável, chamada de variável dependente, em função da outra (ou outras), denominada variável independente. Esta relação pode ser descrita por meio de funções matemáticas, as quais são denominadas modelos de regressão. Segundo Draper e Smith (1998), os modelos de regressão podem ser classificados, em relação a seus parâmetros, da seguinte maneira:

- i*) **modelos lineares:** estes modelos são lineares em relação aos parâmetros, isto é, todas as derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo não dependem de nenhum parâmetro;
- ii*) **modelos não lineares:** são modelos em que pelo menos uma das derivadas

parciais depende de algum parâmetro do modelo e não existe transformação capaz de torná-lo linear;

iii) **modelos linearizáveis:** estes não são lineares em sua forma inicial, mas podem se tornar lineares a partir de alguma transformação.

Os modelos de regressão classificados como lineares são muito utilizados. Nesta classe de modelos, é possível obter uma forma analítica para seus parâmetros. Entretanto, em muitas situações, não é possível descrever o fenômeno por meio de um modelo de regressão linear, sendo a utilização de modelos de regressão não linear a alternativa mais indicada e vantajosa. Estes modelos apresentam interpretação prática dos parâmetros e tendem a utilizar menos parâmetros que na regressão linear. O uso de modelos linearizáveis se torna complicado, pois, como é aplicada transformação, é necessário fazer a transformação inversa nos valores estimados pelo modelo, para só depois interpretar os resultados.

2.3 Curvas de crescimento

Uma das grandes aplicações de modelos de regressão é no estudo de curvas de crescimento. Uma curva que descreve uma sequência de medidas de uma determinada espécie ou indivíduo em função do tempo, geralmente peso, altura ou diâmetro, é chamada de curva de crescimento. Em geral, neste tipo de curva, as taxas de crescimento aumentam até atingir um máximo (ponto de inflexão), depois decrescem e tendem a zero. Este comportamento caracteriza uma curva em formato de “S”, conhecido como formato sigmoidal, que é bem ajustada pela regressão não linear (SEBER; WILD, 1989). Nesse sentido, vários autores têm trabalhado com modelos não lineares no estudo de curvas de crescimento de animais, plantas e frutos. Uma das principais vantagens de modelar as curvas de crescimento via modelos não lineares é o resumo das informações contidas nos

dados, pois estes modelos conseguem resumir tais informações em apenas alguns parâmetros com interpretação prática.

2.3.1 Crescimento animal

No estudo de curvas de crescimento animal, a preferência por modelos não lineares é indiscutível, sendo que os modelos mais utilizados são o de Gompertz, Logístico, Brody, Richards e von Bertalanffy.

Silva et al. (2011) utilizaram estes cinco modelos no estudo de curvas de crescimento de vacas de corte de diferentes tipos biológicos, do nascimento até a idade adulta e concluíram que os modelos Brody e von Bertalanffy forneceram os melhores ajustes. Nieto, Silva e Gondo (2006) concluíram que o modelo Logístico é o mais adequado para descrever o perímetro escrotal de animais da raça Canchim, resultado muito importante para a seleção genética de animais com relação à precocidade e à fertilidade. Espigolan et al. (2009) indicam que o modelo Logístico é o mais adequado para descrever o aumento de peso de novilhos da raça Hereford, devido ao fato de seus parâmetros apresentarem resultados próximos dos encontrados na literatura.

Oliveira, Brandão e Bassanezi (2007) compararam os modelos Logístico, Gompertz e von Bertalanffy generalizado no ajuste de curvas de crescimento de suínos de corte e concluíram que os melhores resultados foram obtidos pelo modelo de von Bertalanffy generalizado. Estudando a curva de crescimento da ovelha-anã, Gbangboche et al. (2008) obtiveram os melhores ajustes pelo modelo de Brody, embora os modelos de Von Bertalanffy, Gompertz e Logístico também tenham descrito de forma satisfatória o crescimento desta espécie. Na avicultura, também é comum a presença destes modelos. Segundo Tholon e Queiroz (2009),

os cinco modelos citados acima são os mais utilizados no estudo do crescimento de aves.

Observando-se os resultados obtidos, é possível perceber que, em diferentes espécies, são indicados diferentes modelos para a descrição de suas curvas de crescimento, pois cada espécie tem uma característica própria de crescimento.

2.3.2 Crescimento de plantas

Na área vegetal, os estudos de curvas de crescimento possibilitam que o pesquisador compare o comportamento do crescimento de uma planta ou de suas partes de interesse, diante das diversas situações experimentais, como adubação, densidade de plantio, irrigação, etc. O uso de modelos não lineares também tem sido constante neste tipo de estudo.

Tei, Scaife e Aikman (1996) ajustaram os modelos Logístico e Gompertz ao acúmulo de matéria seca da alface, da cebola e da beterraba, em função de dias após a emergência e obtiveram bons resultados, com coeficiente de determinação superior a 98%, em ambos os modelos. Fayad et al. (2001) utilizaram o modelo Logístico na descrição do acúmulo de matéria seca total do tomateiro em função da idade (dias após replantio), distinguindo entre os que foram cultivados em ambiente protegido e os cultivados no campo.

Amabile, Guimarães e Farias Neto (2003) estudaram o crescimento do girassol em Latossolo e compararam os ajustes das funções não lineares Logística, Logística generalizada e Weibull. Os resultados obtidos pelo modelo Weibull foram inferiores aos apresentados pela função Logística, tendo, nesse estudo, o parâmetro acrescentado no modelo Logístico generalizado apresentado baixa contribuição para a qualidade dos ajustes. Portanto, a função Logística simples foi

a mais indicada na descrição do crescimento do girassol em Latossolo. Estudando as curvas de crescimento do milho, Lyra et al. (2008) ajustaram o modelo Logístico à altura e à matéria seca da planta e utilizaram um modelo exponencial para descrever o índice de área foliar, considerando diferentes épocas de plantio. Estes autores obtiveram bons ajustes, indicando o modelo Logístico para estudar o crescimento vegetal do milho. Maia et al. (2009) utilizaram os modelos de Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy na descrição das curvas de crescimento de bananeiras e concluíram que os melhores ajustes foram fornecidos pelo modelo Logístico. Martins Filho et al. (2008) fizeram o ajuste do modelo Logístico ao crescimento de duas cultivares de feijoeiro, utilizando a metodologia Bayesiana na estimação dos parâmetros do modelo, obtendo resultados eficientes.

Como se pode observar, a partir do que foi comentado, ao contrário do que acontece com as curvas de crescimento animal, o modelo Logístico é o mais recomendado para descrever as curvas de crescimento vegetal, independente da espécie, sugerindo que o crescimento vegetativo, em geral, apresenta aspecto sigmoidal de crescimento e simetria em relação ao ponto de inflexão.

2.3.3 Crescimento de frutos

Por meio do estudo de curvas de crescimento de frutos é possível analisar e identificar os períodos mais críticos de seu desenvolvimento, possibilitando uma melhoria na produção dos mesmos, fornecendo informações, como o momento de maior ganho de massa do fruto, além de auxiliar nas decisões sobre as épocas mais adequadas de adubação e, principalmente, da colheita. De acordo com Cavalini et al. (2006), apesar de ser um dos principais fatores de perda pós-colheita, o ponto ideal de colheita é, geralmente, determinado de forma subjetiva

por meio da observação visual da coloração externa e tamanho do fruto. Portanto o estudo de curvas de crescimento do fruto pode servir como uma ferramenta para a padronização da época de colheita.

Berilli et al. (2007) utilizaram um modelo não linear para descrever o crescimento de frutos de mamão (*Carica papaya* L.) em três épocas do ano e observaram que este tende à estabilização a partir de 800 graus-dias acumulados, independente da época. Bruna (2007) verificou que o crescimento de pêssegos das variedades de ciclo curto e médio apresenta caráter exponencial, com crescimento rápido e, portanto, deve ser modelado por curvas exponenciais ou sigmoidais. Terra, Muniz e Savian (2010) descreveram o crescimento dos frutos da tamareira-anã, em comprimento e diâmetro, utilizando os modelos Logístico e Gompertz. Com base nos avaliadores de qualidade de ajuste utilizados, o modelo Logístico apresentou os melhores resultados.

As curvas de acúmulo de massa fresca e seca de três variedades de manga (Haden, Palmer e Tommy Atkins), assim como as curvas de exportação de nutrientes das mesmas, foram muito bem descritas pelo modelo Logístico, de acordo com Souza (2007).

Na descrição do crescimento dos frutos do cafeeiro, Cunha e Volpe (2011) obtiveram os melhores ajustes ao acúmulo de massa fresca e seca do fruto, utilizando o modelo não linear de Boltzmann. Laviola et al. (2007) também utilizaram modelos não lineares para explicar o acúmulo de massa seca, bem como as curvas de acúmulo de nutrientes nos frutos do cafeeiro, em função dos dias após o florescimento, obtendo bons ajustes.

Na maioria dos trabalhos nesta área, os autores não consideraram, no momento de estimação dos parâmetros, a possível presença de heterocedasticidade de variâncias e a dependência residual. Conforme será comentado nas subseções

seguintes, ao considerar estas componentes, os ajustes se tornam mais coerentes, gerando um menor erro padrão das estimativas dos parâmetros e intervalos de confiança mais precisos.

2.3.4 Heterocedasticidade de variâncias

Ao se fazer o ajuste de modelos a dados obtidos repetidamente ao longo do tempo, é comum ocorrer a heterocedasticidade de variâncias entre as medidas, pois é natural que, conforme o fruto, a planta ou o animal se desenvolvem, a variação do seu tamanho e/ou peso se torna maior. Segundo Pasternak e Shalev (1994), é possível obter melhores resultados no ajuste de modelos ao se fazer a ponderação pelo inverso da variância amostral. Os autores ilustraram a técnica em um estudo do crescimento de frango de corte.

Mazzini et al. (2003) fizeram o ajuste de modelos não lineares aos dados de crescimento de bovinos machos da raça Hereford, com e sem a ponderação, pelo inverso da variância amostral e concluíram que a ponderação melhorou a qualidade do ajuste para todos os modelos testados. Guedes et al. (2004) estudaram as curvas de crescimento de cordeiros da raça Santa Inês e Bergamácia, utilizando a ponderação pelo inverso da variância amostral e obtiveram resultados satisfatórios. Em ambos os trabalhos, os autores concluíram que os modelos que forneceram os melhores ajustes foram o von Bertalanffy e Gompertz.

Mazucheli, Souza e Philippsen (2011) consideraram a presença de pesos na estimação dos parâmetros, assumindo que a variância é uma função multiplicativa dos níveis da variável independente. Estes autores utilizaram a abordagem clássica e a bayesiana na descrição das curvas de crescimento de codornas e, em ambas as situações, obtiveram melhores resultados pelo modelo Gompertz, quando

consideraram os erros heterocedásticos.

Na presença de variâncias heterogêneas, utilizar a ponderação, além de ser mais coerente, proporciona melhores resultados na estimação dos parâmetros, pois observações com maior variabilidade influenciam menos as estimativas. Esta “melhora” pode ser percebida, principalmente, nos erros padrões das estimativas, os quais se tornam menores, indicando que a estimativa dos parâmetros é mais confiável e, portanto, o modelo é mais adequado. Ao fazer a ponderação pelo inverso da variância amostral, como sugerido por Pasternak e Shalev (1994), não é levada em conta a incerteza que existe em relação a cada “peso” (fator de ponderação), pois este é calculado com base na amostra e conseqüentemente será diferente para uma nova amostra. Neste tipo de ponderação, os pesos são “fixos” e, portanto, diferentes modelos utilizam o mesmo peso. O mais adequado é estimar este fator de ponderação, pois, assim o processo de estimação, incorpora a incerteza existente em relação a cada fator. O argumento *weights* da função *gnls* do software R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012) utiliza esta abordagem, na qual é fornecida uma função que se assemelha ao comportamento da variância, e de quem ela depende, para que sejam estimados os fatores de ponderação em cada data de observação (PINHEIRO; BATES, 2000).

2.3.5 Autocorrelação dos resíduos

Outro aspecto que também pode ser considerado, quando se estudam medidas tomadas ao longo do tempo, é a correlação dos resíduos, pois, de acordo com Hoffmann e Vieira (1998), o resíduo de uma observação pode estar associado com o resíduo das observações adjacentes, ou seja, os resíduos são autocorrelacionados.

Bergamasco, Aquino e Muniz (2001) utilizaram modelos não lineares

incorporando a autocorrelação residual no estudo de curvas de crescimento de fêmeas da raça Holandesa, obtendo estimativas mais confiáveis para os parâmetros. Mazzini et al. (2005), além de fazerem a ponderação pelo inverso da variância, também utilizaram a autocorrelação residual no ajuste dos modelos Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy aos dados de crescimento de novinhos das raças Hereford e Nelore, encontrando estimativas para os parâmetros com um menor erro padrão. Mendes et al. (2008) avaliaram o modelo Logístico difásico no ajuste da curva de crescimento de fêmeas desta mesma raça e obtiveram melhores ajustes ponderando pelo inverso da variância e considerando erros autorregressivos de segunda ordem AR(2).

Muniz, Savian e Scalon (2008) e Savian e Muniz (2007) testaram diferentes configurações sobre as variâncias e os erros no estudo da degradabilidade *in situ* e concluíram que as melhores estimativas para os parâmetros são obtidas quando é considerada a heterocedasticidade de variâncias e autocorrelação dos resíduos. Pereira, Muniz e Silva (2005) compararam o ajuste de oito modelos não lineares no estudo da mineralização de nitrogênio em Latossolo e obtiveram o melhor ajuste pelo modelo de Juma com AR(2).

Considerando as curvas de crescimento de frutos, Prado (2011) obteve os melhores resultados no ajuste de curvas de crescimento do coco quando considerou uma estrutura de erros autorregressivos de primeira ordem, tanto para o modelo Gompertz quanto para o modelo Logístico. Cunha (2011) estudou o crescimento de frutos da ameixeira e também obteve os melhores ajustes utilizando uma estrutura de erros autorregressiva tanto para o modelo Gompertz quanto para o modelo Logístico.

2.4 Modelos de regressão não-linear

Mesmo após o surgimento dos modelos não lineares generalizados, em 1972, os chamados modelos normais não lineares continuaram sendo muito utilizados na literatura nas mais diversas áreas como econometria, agricultura, agronomia, farmacologia, biologia, ecologia, engenharia, educação, química, etc., principalmente no estudo de curvas de crescimento, como comentado na seção 2.3.

A forma clássica de um modelo de regressão não linear é:

$$Y_i = f(X_i, \beta) + \varepsilon_i \quad (2.1)$$

em que $i = 1, 2, 3, \dots, n$; Y_i é o vetor com a variável resposta (variável dependente); X_i é o vetor de uma ou mais variáveis independentes; β é o vetor de parâmetros; $f(\cdot)$ é a função (ou relação) que acredita-se existir entre as variáveis e ε_i é o vetor de erros associados ao modelo.

A principal característica dos modelos de regressão não lineares é que $f(X_i, \beta)$ é deduzido a partir de suposições teóricas por meio de equações diferenciais. Desta forma, os parâmetros resultantes (β) apresentam interpretação prática direta (CORDEIRO; PRUDENTE; DEMÉTRIO, 2009). Outra característica também muito importante desta classe de modelos é que pelo menos uma das derivadas parciais de $f(X_i, \beta)$ em relação à β depende de algum parâmetro.

A seguir são apresentadas as características de alguns dos modelos não lineares mais citados nos estudos de curvas de crescimento.

2.4.1 Modelo Logístico

A função Logística foi proposta, inicialmente, por Verlust, em 1838, para o estudo de crescimento de populações humanas (SEBER; WILD, 1989). Esta é uma das funções não lineares mais conhecidas e utilizadas da literatura. Tal função apresenta muitas parametrizações, sendo a mais comum apresentada em Ratkowski (1983), dada por:

$$Y_i = \frac{\alpha}{1 + e^{(\gamma - kx_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.2)$$

em que Y_i é a i -ésima observação da variável dependente, sendo $i = 1, 2, \dots, n$; x_i é a i -ésima observação da variável independente; α é o valor assintótico que pode ser interpretado como peso adulto, tamanho máximo, etc; γ é um parâmetro de locação sem interpretação prática direta, mas importante para manter o formato sigmoidal do modelo; k está associado ao crescimento, valor que indica o índice de maturidade ou precocidade e quanto maior for o valor de k menos tempo será necessário para o indivíduo, planta ou fruto atingir o valor assintótico (α); ε_i é o erro aleatório associado à i -ésima observação, o qual se supõe que seja independente e identicamente distribuído segundo uma normal de média zero e variância constante, $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$.

Características do modelo Logístico

a) $y = \alpha$ é uma assíntota horizontal superior.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{1 + e^{(\gamma - kx)}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{1 + e^{-(kx - \gamma)}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{1 + \frac{1}{e^{(kx - \gamma)}}} \right) = \alpha$$

b) A função logística é estritamente crescente e não tem ponto crítico.

$$f'(x) = \left(\frac{\alpha}{1 + e^{(\gamma-kx)}} \right)'$$

$$f'(x) = \frac{\alpha k e^{(\gamma-kx)}}{(1 + e^{(\gamma-kx)})^2}$$

Para encontrar o ponto crítico, faz-se $f'(x) = 0$. Para isso, deveríamos ter $\alpha k e^{(\gamma-kx)} = 0$, o que não acontece, uma vez que os parâmetros α e k são estritamente positivos e a exponencial nunca se anula. Logo a função não tem ponto crítico. Do cálculo, tem-se que uma função é estritamente crescente se sua derivada for maior que zero para todo valor do domínio ($f'(x) > 0 \quad \forall x \in D$). Não é difícil perceber que a derivada acima será sempre positiva para todo valor de x . Assim, a função é sempre crescente.

c) É simétrica em relação ao ponto de inflexão.

Por definição, o ponto de inflexão de uma função é dado pelo valor da variável independente em que a derivada de segunda ordem da função se anula. No modelo Logístico, o ponto de inflexão é dado por

$$f''(x) = \frac{-\alpha k^2 e^{\gamma-kx} \cdot (1 + e^{\gamma-kx})^2 + 2\alpha k^2 e^{\gamma-kx} \cdot (1 + e^{\gamma-kx})}{(1 + e^{\gamma-kx})^4}$$

$$f''(x) = \frac{-\alpha k^2 e^{\gamma-kx} \cdot (1 + e^{\gamma-kx}) \cdot [-(1 + e^{\gamma-kx}) + 2]}{(1 + e^{\gamma-kx})^4}$$

$$f''(x) = \frac{-\alpha k^2 e^{\gamma-kx} \cdot [1 - e^{\gamma-kx}]}{(1 + e^{\gamma-kx})^3} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - e^{\gamma-kx} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\gamma}{k}, \text{ ponto de inflexão.}$$

O ponto $x = \frac{\gamma}{k}$ é aquele no qual ocorre a mudança de concavidade da curva. É neste ponto que a taxa de crescimento atinge o seu máximo e, então, começa a diminuir, até estabilizar em zero. Substituindo-se o ponto de inflexão na função logística tem-se

$$y = \frac{\alpha}{1 + e^{(\gamma - k\frac{\gamma}{k})}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\alpha}{2}, \text{ metade da assíntota superior.}$$

Daí vem a simetria em relação ao ponto de inflexão, pois, no ponto em que ocorre a mudança de concavidade, a função logística atinge a metade do valor assintótico.

2.4.2 Modelo Gompertz

O modelo foi proposto por Gompertz, em 1825, para o estudo de tábuas da vida. Posteriormente, foi utilizado na obtenção de curvas de crescimento e ganhou grande destaque na área de ciências atuariais (WINSOR, 1932). Sua formulação inicial era bastante empírica, até que Medawar, em 1940, utilizou-o para descrever o crescimento do coração de galinhas (SEBER; WILD, 1989). Assim como o modelo Logístico, este modelo apresenta diferentes parametrizações, sendo sua forma original, apresentada em Winsor (1932), a seguinte:

$$Y_i = \alpha e^{-e^{(\gamma - kx_i)}} + \varepsilon_i \quad (2.3)$$

em que a interpretação dos parâmetros é a mesma definida anteriormente para o modelo Logístico.

Características do modelo Gompertz

a) $y = \alpha$ é uma assíntota horizontal superior.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha e^{-e^{-(kx-\gamma)}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha e^{-\left[\frac{1}{e^{(kx-\gamma)}} \right]} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{e^{\left[\frac{1}{e^{(kx-\gamma)}} \right]}} \right) = \alpha$$

b) A função é estritamente crescente e não tem ponto crítico.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\alpha e^{-e^{-(\gamma-kx)}} \right)' \\ f'(x) &= \alpha k e^{-e^{-(\gamma-kx)}} \cdot e^{\gamma-kx} \end{aligned}$$

Para se obter o ponto crítico, faz-se $f'(x) = 0$, mas esta derivada nunca será igual a zero, uma vez que os parâmetros α e k são sempre positivos e a exponencial nunca se anula. Logo, a função não tem ponto crítico. E ainda, a derivada é positiva para todo valor de x , o que indica que a função é estritamente crescente.

c) Também apresenta comportamento sigmoidal, mas não é simétrico em relação ao ponto de inflexão.

Calculando-se a segunda derivada e igualando-se a zero tem-se

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha k^2 e^{-e^{-(\gamma-kx)}} \cdot e^{(\gamma-kx)^2} - \alpha k^2 e^{-e^{-(\gamma-kx)}} \cdot e^{(\gamma-kx)} \\ f''(x) &= \alpha k^2 e^{-e^{-(\gamma-kx)}} \cdot e^{(\gamma-kx)} \left[e^{(\gamma-kx)} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{(\gamma-kx)} - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\gamma}{k}, \text{ ponto de inflexão.}$$

No ponto de inflexão ocorre a mudança de concavidade da curva e a taxa de crescimento atinge seu máximo e, então, começa a diminuir até estabilizar em zero. Substituindo-se o ponto de inflexão na função de Gompertz, tem-se:

$$\begin{aligned} y &= \alpha e^{-e^{(\gamma - k\frac{\gamma}{k})}} \\ y &= \alpha e^{-e^0} \\ \Rightarrow y &= \frac{\alpha}{e} \end{aligned}$$

Como $\frac{\alpha}{e} < \frac{\alpha}{2}$, a mudança de concavidade no modelo Gompertz ocorre antes de ser atingida a metade da assíntota. A taxa de crescimento neste modelo atinge seu máximo de forma mais precoce que no modelo logístico. Assim o modelo gompertz não é simétrico em relação ao ponto de inflexão.

2.4.3 Outros modelos não lineares

O modelo não-linear de von Bertalanffy também apresenta formato sigmoidal e não é simétrico em relação ao ponto de inflexão, sendo muito utilizado para a descrição de curvas de crescimento de populações e para o estudo de curvas de crescimento de peixes e crustáceos. Suas características são semelhantes aos modelos anteriores e, por este motivo, suas derivadas foram omitidas. A parametrização mais comum deste modelo é

$$Y_i = \alpha(1 - e^{-k(x_i - \gamma)})^3 + \varepsilon_i \quad (\text{BERTALANFFY, 1957}) \quad (2.4)$$

em que a interpretação dos parâmetros é a mesma da definida anteriormente para o modelo Logístico.

Entre os modelos não lineares nem todos apresentam comportamento

sigmoidal, como, por exemplo, o modelo de Brody (2.5). Este modelo fornece melhores ajustes na descrição de curvas de crescimento, quando estas não apresentam o padrão de crescimento sigmoidal. Sua parametrização mais comum é

$$Y_i = \alpha(1 - e^{-k(x_i - \gamma)}) + \varepsilon_i \quad (\text{BRODY, 1945}) \quad (2.5)$$

em que a interpretação dos parâmetros é a mesma da definida anteriormente para o modelo Logístico, com exceção do parâmetro γ que, neste modelo, não tem interpretação prática direta.

A segunda derivada do modelo Brody é dada por

$$f''(x) = -\alpha k^2 e^{-k(x-\gamma)}$$

Esta derivada nunca será igual a zero, pois os parâmetros α e k são sempre positivos e a exponencial nunca se anula. Logo este modelo não tem ponto de inflexão, apresentando concavidade apenas virada para baixo. Portanto, neste modelo, as taxas de crescimento começam no máximo e vão decrescendo, ao longo do tempo, até estabilizar em zero e o indivíduo parar de crescer.

Devido à semelhança entre as equações 2.4 e 2.5, é comum encontrar, na literatura, trabalhos que confundem estes modelos, descrevendo o modelo de Brody como se fosse o de von Bertalanffy, como: Alp et al. (2011), Castiglioni, Barcelos e Santos (2006), Gomiero, Carmassi e Braga (2007), Sanches e Jafelice (2005) e Trevisan e Santos (2011).

Na tentativa de flexibilizar ao máximo as curvas de crescimento foi criada a curva de Richards (RICHARDS, 1959), com quatro parâmetros, descrita por:

$$Y_i = \alpha(1 + (\delta - 1)e^{-k(x_i - \gamma)})^{\frac{1}{1-\delta}} + \varepsilon_i \quad (2.6)$$

em que a interpretação dos parâmetros é a mesma da definida anteriormente para o modelo Logístico. O parâmetro que é acrescentado (δ) controla a ordenada do ponto de inflexão e determina a forma da curva (FREITAS, 2005).

De acordo com Freitas (2005), o ponto de inflexão da curva de Richards ocorre em

$$Y = \alpha(\delta)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

O parâmetro (δ) é o que diferencia a curva de Richards dos demais modelos. Conforme mudam os valores de δ , a curva de Richards se reduz nos modelos citados anteriormente, como por exemplo,

i) quando $\delta = 0$, tem-se o modelo de crescimento não sigmoidal de Brody.

$$y = \alpha(1 + (0 - 1)e^{-k(x_i - \gamma)})^{\frac{1}{1-0}}$$

$$y = \alpha(1 + e^{-k(x_i - \gamma)}), \rightarrow \text{Brody (eq. 2.5).}$$

Nesse caso, como o modelo de Brody tem apenas um tipo de concavidade, ao substituir $\delta = 0$ na fórmula do ponto de inflexão, tem-se que é zerada a expressão

$$Y = \alpha(\delta)^{\frac{1}{1-\delta}}$$

$$Y = \alpha.0^{\frac{1}{1-0}}$$

$$Y = 0;$$

ii) quando $\delta = \frac{2}{3}$, tem-se o modelo de von Bertalanffy

$$\begin{aligned} y &= \alpha \left(1 + \left(\frac{2}{3} - 1\right) e^{-k(x_i - \gamma)}\right)^{\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}} \\ y &= \alpha \left(1 - \frac{1}{3} e^{-k(x_i - \gamma)}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} \\ y &= \alpha \left(1 - \frac{1}{3} e^{-k(x_i - \gamma)}\right)^3, \rightarrow \text{von Bertalanffy (eq. 2.4)}. \end{aligned}$$

Aqui aparece uma ligeira diferença, mas este "um terço" multiplicando a exponencial é simplesmente uma parametrização diferente. Basta perceber que, na equação 2.4, o termo $e^{k\gamma}$ é uma constante que, nesta nova parametrização, aparece multiplicada por $\frac{1}{3}$, ou seja, não altera a estrutura do modelo mas apenas o valor do parâmetro.

Para se verificar o ponto de inflexão tem-se

$$\begin{aligned} Y &= \alpha(\delta)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ Y &= \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}} \\ Y &= \alpha \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ Y &= \alpha \left(\frac{8}{27}\right) \end{aligned}$$

Logo, o ponto de inflexão do modelo de von Bertalanffy é alcançado em

$$Y = \frac{8\alpha}{27}, \text{ isto é, cerca de 30\% da assíntota superior;}$$

iii) quando $\delta = 2$, tem-se o modelo Logístico

$$\begin{aligned} y &= \alpha(1 + (2 - 1)e^{-k(x_i - \gamma)})^{\frac{1}{1-2}} \\ y &= \alpha(1 + e^{-k(x_i - \gamma)})^{-1} \\ y &= \frac{\alpha}{(1 + e^{-k(x_i - \gamma)})}, \rightarrow \text{Logístico (eq. 2.2)}. \end{aligned}$$

Para verificar o ponto de inflexão,

$$\begin{aligned} Y &= \alpha(\delta)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ Y &= \alpha(2)^{\frac{1}{1-2}} \\ Y &= \alpha(2)^{-1} \\ Y &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Assim, o ponto de inflexão do modelo Logístico ocorre em $Y = \frac{\alpha}{2}$, isto é, 50% da assíntota superior;

iv) quando $\delta \rightarrow 1$, tem se o modelo de Gompertz

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 1} \left(\alpha \left(1 + (\delta - 1)e^{-k(x_i - \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \right) &= \lim_{\delta \rightarrow 1} \left(\alpha \left(1 - (1 - \delta)e^{-k(x_i - \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \right) = \\ = \lim_{\delta \rightarrow 1} \left(\alpha \left(1 - \frac{1}{(1-\delta)} e^{-k(x_i - \gamma)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \right) &= \lim_{\delta \rightarrow 1} \left(\alpha \left(1 - \frac{e^{-k(x_i - \gamma)}}{(1-\delta)} \right)^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \end{aligned}$$

É necessário, neste momento, utilizar a técnica de substituição de variáveis, chamando $\frac{1}{1-\delta}$ de β . Para substituir os índices do limite, tem-se que, quando $\delta \rightarrow 1$, o valor de $\beta \rightarrow +\infty$. Assim o limite anterior fica:

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\alpha \left[1 + \frac{(-e^{-k(x_i - \gamma)})}{\beta} \right]^{\beta} \right) = \alpha e^{-e^{-k(x_i - \gamma)}}, \rightarrow \text{Gompertz (eq. 2.3)}.$$

Para compreender esta última passagem é necessário lembrar do cálculo de processos limite, em que assume-se que,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^c$$

O ponto de inflexão é dado por

$$\begin{aligned} Y &= \lim_{\delta \rightarrow 1} \alpha(\delta)^{\frac{1}{1-\delta}} \\ Y &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \alpha \left(1 + \frac{-1}{\beta}\right)^\beta \\ Y &= \alpha e^{-1} \\ Y &= \frac{\alpha}{e} \end{aligned}$$

Dessa forma, o ponto de inflexão do modelo Gompertz é atingido em $Y = \frac{\alpha}{e}$, isto é, cerca de 37% da assíntota superior.

Portanto a curva de Richards é mais flexível que os modelos anteriores, os quais podem ser considerados como casos particulares do modelo Richards, mas esta flexibilidade tem um custo: o aumento do número de parâmetros.

2.5 O método de mínimos quadrados em regressão não linear

Assim como nos modelos lineares, o processo de estimação dos parâmetros em modelos não lineares pode ser obtido por diferentes métodos, sendo o mais utilizado o método de mínimos quadrados, pois, sob certas condições, seus estimadores são não viesados e apresentam variância mínima em relação a outros estimadores não viesados (DRAPER; SMITH, 1998).

Não é necessária nenhuma pressuposição para aplicar o método de mín-

imos quadrados. No entanto, para que as estimativas dos parâmetros do modelo em questão possam ser utilizados para se fazer algum tipo de inferência, é preciso que alguns pressupostos em relação ao vetor de erros sejam atendidos, tais como erros identicamente distribuídos, independentes, que seguem uma distribuição normal de média zero e variância homogênea. Draper e Smith (1998) afirmam que a estimação dos parâmetros do modelo deve levar em conta os desvios destes pressupostos, sendo as alterações feitas na matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos. De acordo com estes autores, os modelos de regressão podem ser classificados da seguinte maneira:

i) modelos ordinários: são aqueles cuja estrutura de erros não viola nenhuma das pressuposições, ou seja, $\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$;

ii) modelos ponderados: são aqueles em que a estrutura dos erros viola a pressuposição de homocedasticidade de variâncias, $\varepsilon \sim N(0, D\sigma^2)$, em que D é uma matriz diagonal, positiva definida, cujos elementos da diagonal são os pesos que ponderam a variância;

iii) modelos generalizados: são aqueles em que a estrutura dos erros viola a pressuposição de independência e, possivelmente, a homogeneidade de variâncias, $\varepsilon \sim N(0, W\sigma^2)$, em que W é uma matriz simétrica, positiva definida, cujos elementos fora da diagonal principal indicam a correlação dos resíduos e os valores da diagonal são as ponderações das variâncias do erros.

Para ilustrar o método de mínimos quadrados, considere uma equação de regressão não linear como definido em 2.1. Esta equação pode ser escrita em notação matricial, ficando da seguinte forma:

$$Y = F(\beta) + \varepsilon \quad (2.7)$$

em que

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}; F(\beta) = \begin{bmatrix} f(X_1, \beta) \\ f(X_2, \beta) \\ \vdots \\ f(X_n, \beta) \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Tem-se, então, que $E[Y] = E[F(\beta) + \varepsilon] = E[F(\beta)] + \overbrace{E[\varepsilon]}^{=0} = E[F(\beta)] = F(\beta)$. Assim, o resíduo é dado pela diferença entre o valor real e o valor esperado,

$$\varepsilon = Y - F(\beta).$$

O estimador para o vetor de parâmetros β é dado pelo vetor $\hat{\beta}$ que minimiza a soma de quadrados dos resíduos

$$S(\beta) = \varepsilon' \varepsilon = [Y - F(\beta)]' [Y - F(\beta)] = Y'Y - 2Y'F(\beta) + F(\beta)'F(\beta)$$

Esta é uma forma quadrática e tem ponto de mínimo que é obtido derivando-se $S(\beta)$ em relação a β e igualando-se esta derivada a zero. A derivada fica

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial(\beta)} = -2Y' \times \frac{\partial F(\beta)}{\partial(\beta)} + \frac{\partial F'(\beta)}{\partial(\beta)} \times F(\beta) + F'(\beta) \times \frac{\partial F(\beta)}{\partial(\beta)},$$

em que $\frac{\partial F(\beta)}{\partial(\beta)}$ é a matriz de primeiras derivadas parciais, também conhecida como matriz jacobiana. O número de colunas desta matriz está associado ao número de parâmetros do modelo, já o número de linhas é determinado pela quantidade de observações da variável independente (tamanho da amostra). Em um experimento com n observações, considerando um modelo não linear com p parâmetros, a matriz jacobiana terá dimensões $n \times p$ e apresenta a seguinte forma:

$$\frac{\partial F(X, \beta)}{\partial(\beta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, \beta)}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_1, \beta)}{\partial(\beta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_1, \beta)}{\partial(\beta_p)} \\ \frac{\partial f(x_2, \beta)}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_2, \beta)}{\partial(\beta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_2, \beta)}{\partial(\beta_p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_n, \beta)}{\partial(\beta_1)} & \frac{\partial f(x_n, \beta)}{\partial(\beta_2)} & \dots & \frac{\partial f(x_n, \beta)}{\partial(\beta_p)} \end{bmatrix}$$

Chamando a matriz jacobiana de X e recordando a propriedade da transposta de matrizes $(A'B)' = B'A$, tem-se:

$$-2Y'X + 2F'(\beta)X = 0$$

$$X'F(\beta) = X'Y. \quad (2.8)$$

Este é o sistema de equações normais (SEN) para o modelo não linear. Neste caso, a matriz X depende dos parâmetros pela própria definição de modelos não lineares, pois X é a matriz de derivadas parciais do modelo e, para que este seja classificado como não linear, pelo menos uma de suas derivadas parciais deve depender dos parâmetros. Caso contrário, o modelo seria linear. Portanto, $F(\beta)$ e X dependem de β . Deste modo, é impossível obter uma forma fechada para a solução $\hat{\beta}$, sendo necessária a utilização de métodos de busca numérica para uma aproximação desta solução (DRAPER; SMITH, 1998).

2.6 Métodos iterativos

Como o SEN não linear não apresenta solução explícita para estimação dos parâmetros, as estimativas são obtidas por meio de métodos iterativos. Em geral, estes métodos consistem em, a partir de um valor inicial para os parâmetros, ir melhorando-o até que ocorra a convergência para o valor real. Muitos processos iterativos são apresentados na literatura e os que aparecem com mais frequência

são Gauss-Newton, Marquardt e o método do Gradiente, os quais utilizam as derivadas parciais da função esperança em relação a cada parâmetro. Em termos práticos, a principal diferença entre estes algoritmos é o tempo de execução, no entanto, a eficiência de qualquer um deles depende do valor inicial atribuído. Dessa forma, a escolha de um bom valor inicial torna-se mais importante que o método iterativo utilizado para a convergência (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002).

Considera-se que o algoritmo convergiu quando algum critério de parada é atingido, como, por exemplo, atingir um certo número pré-determinado de iterações, as atualizações nos parâmetros serem insignificantes ou a modificação da soma de quadrados dos parâmetros for desprezível. Estes critérios podem ser controlados pelo pesquisador.

É importante ressaltar que, mesmo estabelecendo critérios de parada, em qualquer um desses métodos, a convergência não é garantida e deve-se também tomar cuidado, pois o algoritmo poderá convergir para mínimos locais, ressaltando, novamente, a importância de bons valores iniciais na primeira iteração do processo. A qualidade destes valores iniciais está ligada a resultados de estudos anteriores ou à própria experiência do pesquisador.

2.7 Avaliadores de qualidade de ajuste

Obtidas as estimativas para os parâmetros dos modelos, torna-se necessária a escolha de critérios para selecionar os melhores ajustes.

2.7.1 Coeficiente de determinação ajustado

De acordo com autores como Draper e Smith (1998) e Ratkowski (1983), o coeficiente de determinação, embora seja largamente utilizado para a escolha do

melhor modelo, não faz ponderações sobre o número de componentes utilizados para o modelo matemático estimado. Portanto, na comparação dos modelos com base no coeficiente de determinação, utiliza-se o coeficiente de determinação ajustado, que faz uma ponderação pelo número de parâmetros e é dado por (TERRA; MUNIZ; SAVIAN, 2010)

$$R_a^2 = 1 - \left[\frac{(1 - R^2)(n - i)}{n - p} \right] \quad (2.9)$$

em que R^2 é o coeficiente de determinação, n é o número de medições, p é o número de parâmetros e i está relacionado com o ajuste do intercepto da curva, sendo igual a 1 se houver intercepto e igual a 0, se não houver intercepto no modelo.

É importante ressaltar que o R_a^2 não tem a mesma interpretação do coeficiente de determinação (R^2), que indica o quanto da variação dos dados foi explicado pelo modelo. O R_a^2 perde esta interpretação sendo utilizado apenas para a seleção de modelos, de forma que o maior valor de R_a^2 indica um melhor ajuste.

2.7.2 Critério de Informação de Akaike

O Critério de Informação de Akaike (AIC) é baseado na teoria de decisão e penaliza os modelos quanto ao seu número de parâmetros, evitando assim, modelos com excesso de parâmetros. Este critério de seleção é descrito em Akaike (1974) e pode ser definido como

$$AIC = -2 \ln(\text{like}) + 2p \quad (2.10)$$

em que p é o número de parâmetros do modelo e $\ln(\text{like})$ é o valor do logaritmo de base natural da função de verossimilhança, considerando as estimativas dos parâmetros, sendo que quanto menor o valor de AIC, melhor o ajuste.

2.7.3 Curvaturas de Bates e Watts

Conforme foi comentado na seção 2.6, os estimadores dos parâmetros de modelos não lineares não são obtidos analiticamente. Estes estimadores são obtidos por métodos numéricos que, geralmente, consistem em fazer uma aproximação linear (por série de Taylor) em torno do valor estimado e, só então, aplicar mínimos quadrados. Pela teoria assintótica, conforme se aumenta o tamanho amostral, esta aproximação vai se tornando cada vez melhor, porém, para amostras menores, esta aproximação pode se tornar não ótima. E quanto maior a não linearidade presente no modelo, mais distante do linear estará esta aproximação, tornando menos confiáveis as estimativas obtidas por mínimos quadrados.

Bates e Watts (1980) quantificaram esta não linearidade utilizando o conceito geométrico de curvatura. Estas medidas independem de mudanças de escala nos parâmetros ou nos dados e podem ser utilizadas, portanto, na comparação de diferentes modelos (SEBER; WILD, 1989). Bates e Watts (1980) mostraram que a não linearidade de um modelo pode ser dividida em duas componentes, que são:

- i) não linearidade intrínseca c^l : é a não linearidade característica do modelo, está associada com a falta de planicidade do local da solução e mede a curvatura do espaço de estimação no espaço amostral, em que o espaço de estimação se refere a todas as possíveis soluções do problema de mínimos quadrados. Em regressão linear, esta não linearidade é nula, uma vez que o espaço de estimação é uma reta em um plano ou hiperplano. Já na regressão

não linear, o espaço de estimação é uma curva e a não linearidade intrínseca mede a extensão dessa curva e não se altera devido a reparametrizações do modelo (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002; ZEVIANI et al., 2012).

- ii) não linearidade devido ao efeito dos parâmetros c^θ : representa o valor máximo do efeito da parametrização na não linearidade do modelo. Seu valor aumenta a medida que o comportamento do modelo se afasta de um modelo linear (MAZUCHELI; ACHCAR, 2002; ZEVIANI et al., 2012). Ao contrário da curvatura intrínseca, esta curvatura depende da parametrização escolhida, portanto, uma reparametrização do modelo pode mudar consideravelmente a curvatura do efeito parâmetro (SOUZA et al., 2010).

De acordo com Bates e Watts (1980), uma forma simplificada para o estudo da não linearidade por meio de curvatura é utilizar a medida RMS (curvatura quadrática média), sendo que a notação utilizada para a curvatura RMS intrínseca é c^l e, para a curvatura RMS de efeito paramétrico é c^θ . Calculam-se, então, as estatísticas $c^l \sqrt{F_{(p,n-p)}}$ e $c^\theta \sqrt{F_{(p,n-p)}}$, nas quais $F_{(p,n-p)}$ é o quantil da distribuição F com p e $(n - p)$ graus de liberdade.

Grandes valores da curvatura intrínseca indicam a intensidade da não linearidade da função resposta e o elevado valor para a curvatura paramétrica indica que a parametrização do modelo é responsável pelo afastamento da forma linear (GAZOLA et al., 2011). Um modelo é preferido em relação ao outro quando apresenta os menores valores para estas estatísticas, pois sua não linearidade é menor e, portanto, a aproximação linear fica melhor, fazendo com que as estimativas de mínimos quadrados sejam mais confiáveis.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção são apresentados os dados do crescimento do fruto do cafeeiro analisados e a forma como eles foram obtidos, bem como a metodologia de análise dos mesmos, por meio dos modelos não lineares.

3.1 Material

Os dados analisados foram extraídos de Cunha e Volpe (2011) e correspondem aos resultados de um experimento conduzido na Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias da UNESP, Campus Jaboticabal, SP (altitude: 615 m), com a cultivar Obatã IAC 1669-20, que pertence à espécie *Coffea arabica*. As plantas tinham 5 anos de idade, altura média de 2 m e espaçamento de 3,5 x 0,5 m.

Foram analisados três alinhamentos de plantio: I - ($81^\circ - 261^\circ$), II - ($51^\circ - 231^\circ$) e III - ($66^\circ - 246^\circ$) e as coletas feitas separadamente nas faces norte (N) e sul (S) da planta. Portanto, o experimento é interpretado como um esquema em parcela subdividida, em que o fator da parcela é o alinhamento de plantio e o fator da subparcela são as faces norte e sul do cafeeiro. Foram utilizadas 4 repetições, constando de 400 plantas por alinhamento (100 plantas em cada repetição), de acordo com o esquema da Figura 2.

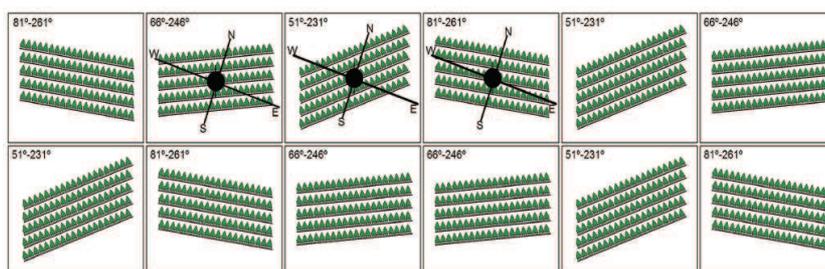


Figura 2 Representação esquemática da distribuição dos alinhamentos de plantio e das parcelas do experimento (CUNHA; VOLPE, 2011)

Em função de anomalias ocorridas nas floradas do ano 2007/2008 na região, as coletas tiveram que ser feitas aleatoriamente, em cada alinhamento dentro das repetições, sendo 100 frutos por alinhamento (50 da face norte e 50 da face sul) e, portanto, um total de 300 frutos em toda a área do ensaio em cada coleta. Foram realizadas 14 coletas com um espaçamento médio entre elas de 15 dias nas seguintes datas: 06/11/07 (96 dias após o florescimento - DAF), 21/11/07 (111 DAF), 06/12/07 (126 DAF), 21/12/07 (141 DAF), 07/01/08 (158 DAF), 23/01/08 (174 DAF), 07/02/08 (189 DAF), 22/02/08 (204 DAF), 08/03/08 (219 DAF), 24/03/08 (235 DAF), 08/04/08 (250 DAF), 23/04/08 (265 DAF), 06/05/08 (279 DAF) e 21/05/08 (293 DAF). Os frutos eram acondicionados em sacos plásticos para posterior pesagem em balança analítica de 0,0001g de precisão e assim obter a massa fresca média (em gramas).

3.2 Metodologia

O primeiro passo é analisar se existe presença de heterocedasticidade de variâncias nos dados. De acordo com Borges e Mazucheli (2010), um dos testes mais poderosos para determinar se as variâncias são heterogêneas é o teste F máximo de Hartley, que consiste na divisão da maior pela menor variância encontrada, sendo que a não significância indica que não há heterocedasticidade de variâncias. Foram obtidas as variâncias da variável resposta em cada data de coleta e foi aplicado o teste F máximo de Hartley. Quando o teste constatou a presença de variâncias heterogêneas, foi utilizada a ponderação por pesos estimados, que consiste em estimar um fator de ponderação para cada uma das datas de coleta, incorporando, assim, a heterocedasticidade no momento da estimação dos parâmetros dos modelos.

3.2.1 Modelos ajustados

Para a descrição do crescimento do fruto do cafeeiro foram utilizados os modelos não lineares Logístico (equação 2.2) e Gompertz (equação 2.3), considerando os resíduos independentes ou com estrutura de correlação AR(1), quando necessário, ajustados aos dados de acúmulo de massa fresca em função dos dias após florescimento, considerando os diferentes alinhamentos de plantio e as diferentes faces da planta. Portanto, foram realizados 12 ajustes, sendo dois modelos para cada combinação dos fatores. Estes modelos foram escolhidos, pois descrevem um comportamento sigmoideal e o crescimento do fruto do cafeeiro em matéria fresca segue este padrão (CLOWES, 1977; CUNHA; VOLPE, 2011; GEROMEL, 2006; RENA; MAESTRI, 1985).

3.2.2 Método de Gauss-Newton

Na estimação dos parâmetros dos modelos foi utilizado o algoritmo de convergência de Gauss-Newton, que é também conhecido como método da linearização, pois utiliza uma expansão em série de Taylor para aproximar o modelo de regressão não linear com termos lineares e, então, aplicar o método dos mínimos quadrados ordinários para a estimação dos parâmetros. Inclusive, uma variação deste método está implementada nas funções *nls* e *gnls* do software R.

Como, na maioria dos processos iterativos, o primeiro passo para o método de Gauss-Newton é atribuir valores iniciais para o vetor de parâmetros denotado por $\beta^0 = [\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_p^0]$, em que p é o número de parâmetros do modelo.

Com os valores iniciais atribuídos, o método consiste no desenvolvimento em série de Taylor, até o termo de primeira ordem da função $F(\beta)$, em torno do

valor inicial β^0 :

$$F(\beta) = F(\beta^0) + X^0(\beta - \beta^0)$$

em que X^0 é a matriz de derivadas parciais avaliada no ponto β^0 , $X^0 = \frac{\partial F(\beta^0)}{\partial(\beta)}$.

Dessa forma, o modelo não linear (equação 2.7) pode ser reescrito,

$$Y = F(\beta) + \varepsilon$$

$$Y = F(\beta^0) + X^0(\beta - \beta^0) + \varepsilon$$

$$Y - F(\beta^0) = X^0(\beta - \beta^0) + \varepsilon$$

Denotando $Y - F(\beta^0)$ por Y^0 , assim como $(\beta - \beta^0)$ por θ^0 , o modelo pode ser reescrito da seguinte forma:

$$Y^0 = X^0\theta^0 + \varepsilon$$

O resultado é uma regressão linear cujos coeficientes representam uma correção que deve ser feita nos coeficientes de regressão iniciais. Dessa forma, os coeficientes de regressão de θ^0 podem ser facilmente estimados pelo sistema de equações normais de uma regressão linear da seguinte forma (DRAPER; SMITH, 1998):

$$\hat{\theta}^0 = (X'^0 X^0)^{-1} X'^0 Y$$

Terminada a primeira iteração, a atualização do vetor de estimativas dos parâmetros é feita da seguinte maneira: $\beta^1 = \beta^0 + \theta^0$. Se o algoritmo de Gauss-Newton estiver na direção correta, a soma de quadrados residual deverá diminuir. Isto é, seja $S(\beta^1)$ a soma de quadrados residual, considerando β^1 e $S(\beta^0)$ a soma de quadrados residual, considerando β^0 , espera-se que $S(\beta^1) < S(\beta^0)$.

Iterações sucessivas desse processo, geralmente, conduzem a estimativas

para os parâmetros, e o processo iterativo termina quando é atingido algum critério de parada. Foi utilizado o critério de parada padrão da função *gnls* do software R.

3.2.3 Análise de resíduos

Foram estimados os parâmetros do modelo, considerando que todos os pressupostos sobre o vetor de resíduos são atendidos, ou seja, inicialmente, não existem indícios para negar que os resíduos sejam independentes, identicamente distribuídos segundo uma normal de média zero e variância constante. A partir deste ajuste, foram obtidos os resíduos ordinários, por meio dos quais foi feita a análise de resíduos com base em testes estatísticos. A análise de resíduos é muito importante para verificar a adequabilidade do modelo. Caso algum dos pressupostos não seja atendido, o modelo não é adequado e este desvio deve ser corrigido ou incorporado ao modelo.

Para verificar a hipótese de independência dos resíduos foi utilizado o teste de Durbin Watson. A rejeição da hipótese nula pelo teste de Durbin Watson indica presença de autocorrelação residual de primeira ordem AR(1) nos resíduos. A estatística do teste é calculada por

$$D = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

em que ε_i e ε_{i-1} é o resíduo da observação no tempo i e o resíduo da observação no tempo $i - 1$, respectivamente.

O valor D está entre 0 e 4. Valores calculados próximos de 0 indicam presença de autocorrelação positiva; próximos de 2 significa que os resíduos são independentes e próximos de 4 indicam presença de autocorrelação negativa.

Nas situações em que o teste Durbin Watson indicou a presença de autocorrelação nos resíduos, a estimação dos parâmetros foi feita pelo método de mínimos quadrados generalizados. De acordo com Morettin e Toloi (2004), em presença de correlação na forma de erros autorregressivos de primeira ordem AR(1), os erros do modelo são considerados da seguinte maneira:

$$\varepsilon_i = \phi_1 \varepsilon_{i-1} + \lambda_i,$$

em que ε_i são os resíduos do modelo, ϕ_1 é o parâmetro da autocorrelação de primeira ordem, λ_i é o erro puro (ruído branco), $i = 1, 2, \dots, n$, $E[\lambda_i] = 0$, $E[\lambda_i^2] = \sigma_\lambda^2$ e $E[\lambda_i \lambda_{i-h}] = 0$ se $h \neq 0$.

Quando é constatada dependência residual em forma de um processo autorregressivo de primeira ordem AR(1), a única coisa que muda na estrutura dos modelos é a forma de considerar o erro que era ε_i , nas equações 2.2 e 2.3 e passa a ser $\phi_1 \varepsilon_{i-1} + \lambda_i$, sendo $i = 2, \dots, n$.

A verificação do pressuposto de normalidade de resíduos pode ser feita por meio de gráficos, como o qq-plot que relaciona os quantis teóricos da distribuição normal com os estimados, ou por meio de testes de hipótese consagrados, tais como Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors e Shapiro-Wilk. Foi utilizado neste trabalho o teste de normalidade de Shapiro-Wilk, no qual a hipótese nula é a de que os resíduos seguem uma distribuição normal. A estatística de teste para verificar se uma determinada amostra provém de uma distribuição normal é calculada da seguinte forma (SHAPIRO; WILK, 1965):

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (x_{(i)} - \bar{x})^2},$$

em que \bar{x} é a média amostral; $x_{(i)}$ são os valores amostrais ordenados ($x_{(1)}$ é o

menor) e o valor b é calculado com base nas médias, variâncias e covariâncias das estatísticas de ordem de uma amostra aleatória de tamanho n de uma distribuição normal - mais detalhes podem ser obtidos em: Shapiro e Wilk (1965). Menores valores de W são evidências de desvios da normalidade.

Para verificar se a variância residual apresenta-se constante, foi utilizado o teste de Breusch-Pagan, que tem como hipótese nula a homocedasticidade dos resíduos. Este teste segue uma distribuição de qui-quadrado e o valor calculado é comparado com a tabela desta distribuição, considerando 1 grau de liberdade. Mais detalhes sobre este teste podem ser obtidos em Breusch e Pagan (1979).

3.2.4 Intervalos de confiança para os parâmetros

Sob a suposição de normalidade dos resíduos, torna-se possível construir intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros. De acordo com Draper e Smith (1998), uma aproximação da matriz de variância-covariância dos coeficientes de regressão é dada por:

$$\hat{V}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\hat{\sigma}^2$$

em que X é a matriz de primeiras derivadas parciais do modelo e $\hat{\sigma}^2$ é estimado por

$$\hat{\sigma}^2 = QME = \frac{SQE}{n-p} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - F(\hat{\beta}))^2}{n-p}$$

Portanto, o erro padrão da estimativa de determinado parâmetro do modelo, $\hat{\beta}_i$, é dado por

$$ep(\hat{\beta}_i) = \sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_i)}$$

sendo $\hat{V}(\hat{\beta}_i)$ um elemento da diagonal principal da matriz de variância-covariância. Dessa forma define-se o intervalo de 95% de confiança para o parâmetro β_i do modelo como

$$IC(\beta_i) : \hat{\beta}_i \pm t_{(v;0,025)} \cdot ep(\hat{\beta}_i)$$

em que $t_{(v;0,025)}$ é o quantil superior da distribuição t de Student, considerando $\alpha = 5\%$ e o grau de liberdade $v = n - p$.

Neste momento, é importante a pressuposição inicial de normalidade do vetor de erros, pois, se a estrutura deste vetor não fosse conhecida e supostamente normal, a estatística t usada neste passo não faria sentido, fornecendo intervalos de confiança imprecisos.

3.2.5 Comparação dos modelos

Ajustados os modelos, estes foram comparados com base na qualidade do ajuste fornecido. Esta comparação foi baseada nos resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste: coeficiente de determinação ajustado (R_a^2), sendo considerado como melhor aquele modelo que forneceu o maior valor do R_a^2 ; critério de informação de Akaike (AIC), que é proporcional ao quadrado médio do resíduo e, portanto, foi eleito como melhor modelo aquele que apresentou os menores valores de AIC e curvaturas de Bates e Watts, que medem a não linearidade do modelo, foi escolhido como melhor modelo aquele que apresentou os menores valores de não linearidade tanto intrínseca (c'), quanto paramétrica (c^θ).

3.2.6 Recursos computacionais

A estimação dos parâmetros dos modelos, bem como os testes estatísticos, os ajustes gráficos e toda a parte computacional envolvida na elaboração deste trabalho foram feitos utilizando-se o software estatístico R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2012). Os pacotes utilizados foram *nlme*, *car*, *lmtest* e *qpcR*. Todas as rotinas utilizadas estão disponibilizadas em anexo.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após o ajuste dos modelos Logístico e Gompertz, considerando que todas as pressuposições sobre o vetor de erros são aceitas, isto é, os resíduos são independentes e identicamente distribuídos seguindo uma normal de média zero e variância constante ($\varepsilon \sim N(0, I\sigma^2)$), foi feita a análise de resíduos com base nos seguintes testes estatísticos: Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan. Nas Tabelas 1 e 2 apresentam-se os resultados obtidos na aplicação destes testes para os dois modelos.

Tabela 1 Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos do modelo Gompertz, para os três alinhamentos de plantio nas faces norte e sul.

Alinhamentos	Shapiro-Wilk	valor-p	Durbin-Watson	valor-p	Breusch-Pagan	valor-p
I - Norte	0,9173	0,2008	1,5093	0,0942	5,2764	0,0715
I - Sul	0,9376	0,3883	1,6423	0,1735	3,4848	0,1751
II - Norte	0,9242	0,2523	1,4170	0,0441	1,3585	0,5070
II - Sul	0,9461	0,5025	1,0894	0,0120	1,6979	0,4279
III - Norte	0,8796	0,0673	1,9185	0,4021	1,6849	0,4307
III - Sul	0,9434	0,4642	1,6922	0,1829	2,8244	0,2436

Tabela 2 Valores das estatísticas dos testes de Shapiro-Wilk, Durbin-Watson e Breusch-Pagan, com os respectivos valor-p, aplicados aos resíduos do modelo Logístico, para os três alinhamentos de plantio nas faces norte e sul.

Alinhamentos	Shapiro-Wilk	valor-p	Durbin-Watson	valor-p	Breusch-Pagan	valor-p
I - Norte	0,9166	0,1964	1,2434	0,0321	5,1141	0,0775
I - Sul	0,9268	0,2749	1,3462	0,0320	3,7806	0,1510
II - Norte	0,9229	0,2422	1,1313	0,0125	2,3037	0,3161
II - Sul	0,9387	0,4019	0,8618	0,0001	1,9788	0,3718
III - Norte	0,9138	0,1789	1,3947	0,0684	1,1843	0,5532
III - Sul	0,9258	0,2660	1,3237	0,0629	2,7923	0,2475

Observando-se os resultados apresentados nas Tabelas 1 e 2 percebe-se por meio do teste de Shapiro-Wilk, que a pressuposição de normalidade residual foi atendida em ambos os modelos, pois este teste apresentou valor-p maior que 0,05 para todas as situações estudadas. Pelo teste de Breusch-Pagan, também com base no valor-p, conclui-se que as variâncias residuais são homogêneas, em todas as situações estudadas, para os dois modelos ($p > 0,05$).

Por meio do teste de Durbin-Watson, considerando um nível de significância de 5%, foi possível perceber que, em algumas situações, os resíduos não atendem ao pressuposto de independência ($p < 0,05$), ou seja, são correlacionados e isto deve ser levado em conta no momento de estimação dos parâmetros. Para o modelo Gompertz (Tabela 1) o teste foi significativo nas duas faces do alinhamento de plantio II (51° - 231°). Estes valores estão em negrito na Tabela 1. Portanto, aos dados deste alinhamento foi ajustado um modelo Gompertz, considerando um processo autorregressivo de primeira ordem AR(1).

No modelo Logístico foi constatada a presença de resíduos correlacionados nas faces norte e sul dos alinhamentos de plantio I (81° - 261°) e II (51° - 231°), valores em negrito na Tabela 2. Dessa forma foi incorporada aos resíduos do modelo Logístico uma estrutura autorregressiva de primeira ordem AR(1) para estes alinhamentos.

Por meio do teste F máximo de Hartley foi constatada a presença de heterocedasticidade das variâncias amostrais para todos os alinhamentos de plantio nas faces norte e sul. Portanto, a estimação dos parâmetros foi feita de forma ponderada, tendo o fator de ponderação sido estimado por meio do argumento “weights” da função “gnls” do R, para “todos os modelos ajustados”.

4.1 Alinhamento de plantio I - (81° - 261°)

Na Tabela 3 são apresentadas as estimativas dos parâmetros para o modelo Gompertz, considerando os resíduos independentes e Logístico com AR(1), nas duas situações estudadas (faces norte e sul do alinhamento de plantio I), com uma ponderação por pesos estimados. Todos os parâmetros foram significativos, pelo teste t, a 1% de significância.

Tabela 3 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz com estrutura de erros independentes e Logístico com AR(1), ambos ponderados, e seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste ao acúmulo de massa fresca do fruto do cafeeiro das faces norte e sul da planta no alinhamento de plantio I (81° - 261°).

	Gompertz			Logístico		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
Face Norte						
α	1,0169	1,1108	1,2048	0,9902	1,0815	1,1728
γ	2,3838	3,7805	5,1772	3,0617	5,7019	8,3420
k	0,0154	0,0241	0,0329	0,0179	0,0331	0,0483
ϕ_1	-	-	-	-	0,2622	-
Face Sul						
α	0,9626	1,0495	1,1364	0,9410	1,0276	1,1142
γ	2,6803	4,1031	5,7058	3,4268	6,2582	9,0897
k	0,0174	0,0271	0,0368	0,0202	0,0370	0,0537
ϕ_1	-	-	-	-	0,2224	-

Como se observa na Tabela 3, os valores estimados para os parâmetros dos diferentes modelos não se diferenciam muito, tendo a maior diferença sido observada no parâmetro γ , que está associado com a ordenada do ponto de inflexão da curva. Como o modelo Gompertz atinge o ponto de inflexão antes de ser alcançada metade do valor assintótico, o parâmetro γ é menor para este modelo. Conforme foi comentado na subseção 2.4.1, o modelo Logístico é simétrico em relação ao ponto de inflexão, e a ordenada deste ponto ocorre no valor $x = \frac{\gamma}{k}$.

Nesse sentido Gazola et al. (2011) afirmam que para o modelo Logístico, este ponto é aquele no qual a variável em estudo alcança 50% do seu valor final. Desta forma, para este alinhamento, a metade do valor final da massa fresca do fruto foi atingida em $x = \frac{\gamma}{k} = \frac{5,7019}{0,0331} \cong 173$ dias após o florescimento, para a face norte e em $x = \frac{\gamma}{k} = \frac{6,2582}{0,0370} \cong 169$ DAF, para a face sul. Observando-se as datas em que foram feitas as coletas, este ponto ocorre próximo ao dia 20 de janeiro.

Os valores estimados para o peso assintótico α (peso máximo) estão bem próximos dos observados por Cunha e Volpe (2011), que foram de 1,212 g e 1,093 g para as faces norte e sul, respectivamente. O modelo Logístico subestima este valor, apresentando estimativas menores que as obtidas pelo modelo Gompertz para o peso máximo do fruto.

Observando-se os resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste apresentados na Tabela 4 é possível perceber que, curiosamente, ambos os modelos apresentaram melhores ajustes aos dados de acúmulo de massa fresca do fruto da face sul da planta, sugerindo que estes apresentam um padrão de crescimento mais próximo do sigmoidal. Observa-se também que o modelo Gompertz apresenta melhores resultados em relação ao modelo Logístico. Os ajustes dos modelos são apresentados na Figura 3.

Tabela 4 Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz com estrutura de erros independentes e Logístico com AR(1), para o acúmulo de massa fresca dos frutos do alinhamento de plantio I- (81° - 261°), considerando as faces norte e sul da planta.

Face	Modelo	R_a^2	AIC	c^l	c^h
Norte	Gompertz	0,9594	-27,01	0,30	0,86
	Logístico	0,9361	-22,44	0,34	1,02
Sul	Gompertz	0,9623	-27,29	0,30	0,83
	Logístico	0,9417	-22,06	0,34	0,96

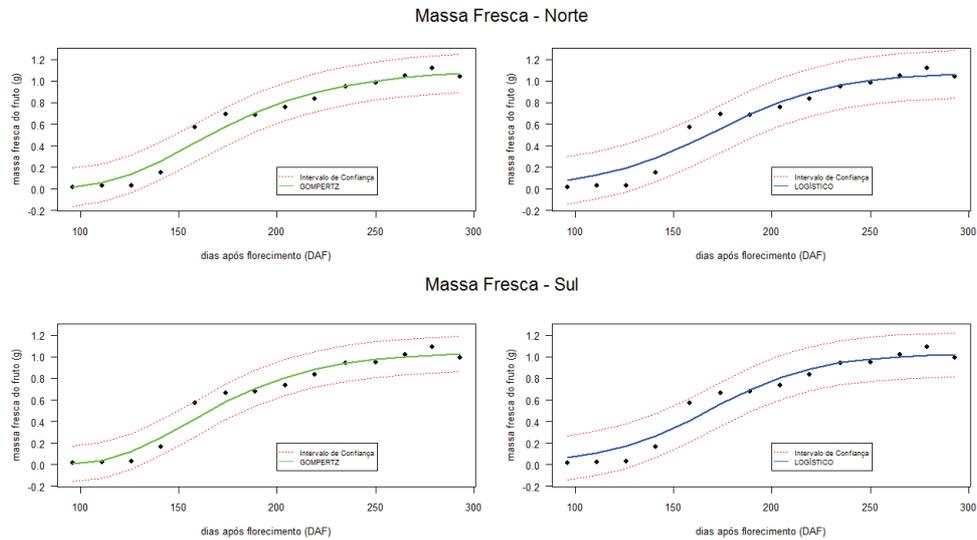


Figura 3 Ajustes dos modelos Gompertz e Logístico com AR(1) ao acúmulo de massa fresca do fruto nas faces norte e sul da planta do cafeeiro, para o alinhamento de plantio I (81° - 261°)

Como se observa na Tabela 5, quando os modelos são ajustados considerando-se uma estrutura de erros independentes e variâncias amostrais homogêneas (sem ponderação), a assíntota superior α é subestimada, obtendo-se valores muito menores do que os observados por Cunha e Volpe (2011), além de os erros-padrões das estimativas dos parâmetros serem bem maiores, ocasionando intervalos de confiança com maior amplitude.

Tabela 5 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz e Logístico, considerando erros independentes e sem ponderação, com seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste ao acúmulo de massa fresca dos frutos das faces norte e sul da planta, no alinhamento de plantio I- (81° - 261°).

	Gompertz			Logístico		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
Face Norte						
α	0,9510	1,0617	1,2342	0,9133	1,0279	1,1877
γ	2,9935	4,5155	7,2366	4,8597	7,2807	12,7941
k	0,0186	0,0291	0,0474	0,02731	0,0433	0,0642
Face Sul						
α	0,9221	1,0230	1,1729	0,8875	0,9934	1,1348
γ	3,1211	4,6589	7,3608	5,0105	7,4639	12,9048
k	0,0197	0,0303	0,0485	0,0286	0,0448	0,0813

4.2 Alinhamento de plantio II - (51° - 231°)

Para este alinhamento foi rejeitada a hipótese de independência dos resíduos pelo teste de Durbin-Watson, indicando a presença de autocorrelação na forma de um processo autorregressivo de primeira ordem AR(1), nos modelos Logístico e Gompertz. Dessa forma, foi acrescentado o parâmetro ϕ_1 às equações dos modelos, no intuito de modelar esta dependência residual. Todos os parâmetros da Tabela 6 foram significativos, pelo teste t, a 1% de significância.

Os valores estimados para o parâmetro γ novamente indicam que o modelo Gompertz atinge o ponto de inflexão antes do modelo Logístico. Os valores estimados para a assíntota superior (α) estão de acordo com os observados por Cunha e Volpe (2011) que, para este alinhamento, foram de 1,09 g e 1,059 g, para as faces norte e sul, respectivamente. O índice de maturidade (k) pouco se altera em relação ao alinhamento anterior. Uma alteração mais significativa ocorre em relação à massa fresca máxima que, para este alinhamento, é menor que no

alinhamento I, indicando que os frutos tendem a ser mais leves neste alinhamento.

Tabela 6 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz com AR(1) e Logístico com AR(1), ambos ponderados, e seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste ao acúmulo de massa fresca dos frutos das faces norte e sul da planta, no alinhamento de plantio II - (51° - 231°).

	Gompertz			Logístico		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
Face Norte						
α	0,8964	1,0163	1,1362	0,9150	1,0279	1,1408
γ	2,7829	4,5596	6,3363	3,3270	6,1419	8,9569
k	0,0177	0,0294	0,0412	0,0189	0,0358	0,0526
ϕ_1	-	0,3177	-	-	0,3869	-
Face Sul						
α	0,7857	0,9265	1,0672	0,9139	1,0372	1,1605
γ	3,7277	5,4574	7,1872	3,0366	5,5251	8,0135
k	0,0235	0,0355	0,0475	0,0167	0,0312	0,0456
ϕ_1	-	0,5456	-	-	0,5116	-

Como sugerido por Gazola et al. (2011), considerando as estimativas do modelo Logístico, o fruto atinge 50% da massa fresca final no ponto $x = \frac{\gamma}{k} = \frac{6,1419}{0,0358} \cong 172$ DAF, para os frutos da face norte e $x = \frac{\gamma}{k} = \frac{5,5251}{0,0312} \cong 177$ DAF, para os frutos da face sul da planta. Estes pontos correspondem à última quinzena de janeiro de acordo com as datas de coletas do experimento.

Os resultados dos avaliadores apresentados na Tabela 7 são melhores que os da Tabela 4, indicando que, para este alinhamento, foram encontrados melhores ajustes. O modelo Gompertz figura com os melhores resultados perante os avaliadores de qualidade utilizados, sugerindo um comportamento mais próximo do sigmoidal, porém, assimétrico em relação ao ponto de inflexão, como se observa na Figura 4.

Tabela 7 Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz com AR(1) e Logístico com AR(1), para o acúmulo de massa fresca dos frutos do alinhamento de plantio II- (51° - 231°), considerando as faces norte e sul da planta.

Face	Modelo	R_a^2	AIC	c^l	c^θ
Norte	Gompertz	0,9665	-28,05	0,27	0,87
	Logístico	0,9494	-24,09	0,29	1,07
Sul	Gompertz	0,9561	-35,02	0,24	0,90
	Logístico	0,9524	-28,98	0,25	1,13

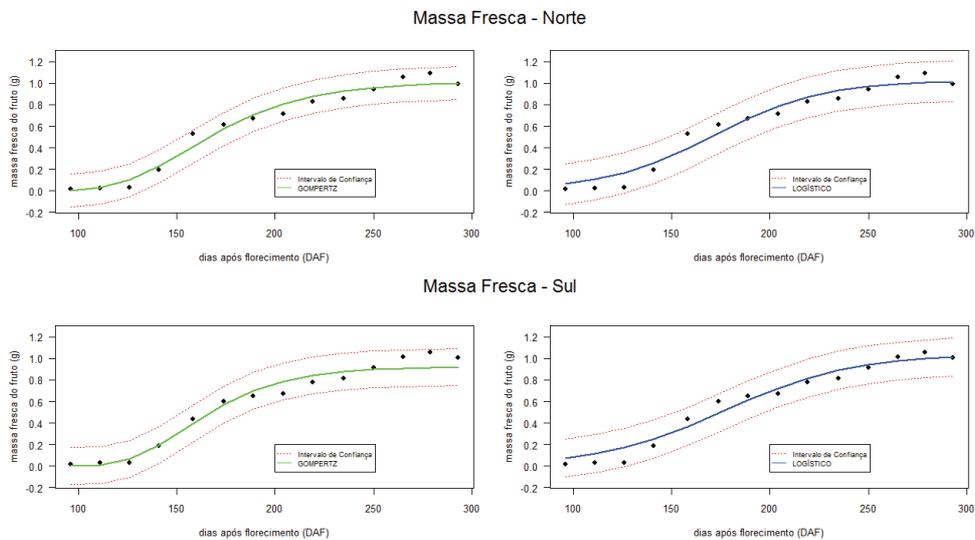


Figura 4 Ajustes dos modelos Gompertz e Logístico ao acúmulo de massa fresca do fruto nas faces norte e sul da planta do cafeeiro, para o alinhamento de plantio II (51° - 231°)

Quando foi considerada uma estrutura de erros independentes e variâncias amostrais homogêneas (sem ponderação), o erro padrão das estimativas aumentou e os intervalos de confiança se tornaram maiores, principalmente em relação ao parâmetro α . Este fato indica que as estimativas são menos precisas, justificando o uso da ponderação e a utilização de erros correlacionados.

Tabela 8 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz e Logístico considerando erros independentes e sem ponderação, com seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste ao acúmulo de massa fresca dos frutos das faces norte e sul da planta, no alinhamento de plantio II- ($51^\circ - 231^\circ$).

	Gompertz			Logístico		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
Face Norte						
α	0,9431	1,0513	1,2219	0,9024	0,0114	1,1678
γ	2,8574	4,0881	6,0142	4,7268	6,7596	10,4323
k	0,0175	0,0261	0,0390	0,0261	0,0395	0,0637
Face Sul						
α	0,9406	1,0519	1,2343	0,8910	1,0009	1,1685
γ	2,7289	3,7842	5,3551	4,6039	6,4234	9,5481
k	0,0162	0,0236	0,0341	0,0246	0,0367	0,0569

4.3 Alinhamento de plantio III - ($66^\circ - 246^\circ$)

De acordo com o teste Durbin-Watson ($p > 0,05$), os resíduos para este alinhamento de plantio podem ser considerados independentes. Desta forma, não foi necessário considerar a dependência residual na estimação dos parâmetros.

Na Tabela 9 são apresentadas as estimativas dos parâmetros dos modelos com intervalo de confiança de 95%. Todos os parâmetros foram significativos, de acordo com o teste t a 1% de significância.

As estimativas para o parâmetro α (peso máximo) estão de acordo com

os valores observados por Cunha e Volpe (2011), que foram de 1,09 g e 1,033 g para as faces norte e sul, respectivamente. Os índices de maturidade (k) estão ligeiramente maiores, indicando que o fruto se desenvolve mais rapidamente neste alinhamento.

Tabela 9 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz e Logístico considerando estrutura de erros independentes e ponderação por pesos estimados, com seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste ao acúmulo de massa fresca dos frutos das faces norte e sul da planta no alinhamento de plantio III- (66° - 246°).

	Gompertz			Logístico		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
Face Norte						
α	0,9300	1,0085	1,0870	0,9201	0,9912	1,0623
γ	3,8665	4,8416	5,8168	5,6845	7,6139	9,5432
k	0,0238	0,0303	0,0368	0,0321	0,0439	0,0556
Face Sul						
α	0,9468	1,0261	1,1053	0,9512	1,0214	1,0915
γ	2,5784	3,8561	5,1338	3,3529	5,3170	7,2811
k	0,0166	0,0246	0,0326	0,0194	0,0305	0,0417

Considerando as estimativas do modelo Logístico, a metade da massa fresca do fruto é atingida no ponto $x = \frac{\gamma}{k} = \frac{7,6139}{0,0439} \cong 173$ DAF, para os frutos da face norte e $x = \frac{\gamma}{k} = \frac{5,3170}{0,0305} \cong 174$ DAF, para os frutos da face sul da planta. Em todos os alinhamentos de plantio estudados (I, II e III), as estimativas para o ponto no qual é obtida a metade da massa fresca do fruto com base nos parâmetros do modelo Logístico caem na última quinzena de janeiro, próximo aos 173 dias após a florada. Esta época coincide com o estágio de crescimento lento, passando a granação, de acordo com a tabela das fases fenológicas do cafeeiro arábica apresentada em Camargo e Camargo (2001). Mas, a metade da massa fresca do fruto deve ser atingida no estágio anterior, que é o estágio de crescimento

rápido, pois, segundo Ságio (2009), nos estágios de crescimento lento e granação, o aumento de massa fresca já não é tão significativo e é natural que, quando o fruto se encontra no estágio de crescimento rápido, as taxas de crescimento atinjam seu máximo (ponto de inflexão) e comecem a diminuir, levando o fruto ao estágio de crescimento lento. Ou seja, enquanto a tabela das fases fenológicas indica que o fruto deveria estar entre os estágios III e IV, os resultados indicam que ele ainda está no estágio II, fato que corrobora a idéia de que a cultivar Obatã IAC 1669-20 apresenta desenvolvimento do fruto mais tardio, como comentado por diversos autores, tais como Cunha e Volpe (2011) e Pezzopane et al. (2003).

Tabela 10 Avaliadores de qualidade de ajuste dos modelos Gompertz e Logístico com estruturas de erros independentes, para o acúmulo de massa fresca dos frutos do alinhamento de plantio III- (66° - 246°), considerando as faces norte e sul da planta.

Face	Modelo	R_a^2	AIC	c^l	c^{θ}
Norte	Gompertz	0,9837	-40,42	0,21	0,62
	Logístico	0,9733	-31,40	0,22	0,73
Sul	Gompertz	0,9673	-31,88	0,28	0,76
	Logístico	0,9365	-27,43	0,30	0,89

Como se observa na tabela 10, os resultados dos avaliadores de qualidade de ajuste foram os melhores neste alinhamento, se comparados com os alinhamentos anteriores (Tabelas 4 e 7). Isso indica que o crescimento do fruto do cafeeiro para este alinhamento é mais próximo do comportamento sigmoidal, sendo, portanto, mais bem descrito pelos modelos não lineares utilizados. Neste alinhamento, os melhores ajustes foram obtidos por ambos os modelos para os dados de crescimento da face norte da planta, ao contrário do que aconteceu no alinhamento de plantio I. Na Figura 5 são apresentados os ajustes dos modelos aos dados de acúmulo de massa fresca das faces norte e sul.

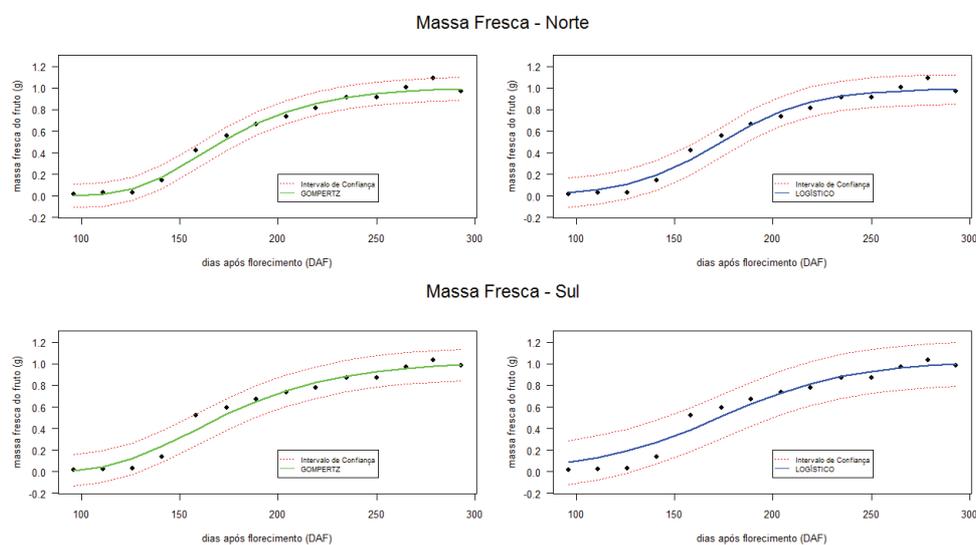


Figura 5 Ajustes dos modelos Gompertz e Logístico ao acúmulo de massa fresca do fruto nas faces norte e sul da planta do cafeeiro, para o alinhamento de plantio III ($66^\circ - 246^\circ$)

São facilmente identificáveis, nas Figuras 3, 4 e 5, as diferentes fases de desenvolvimento dos frutos: inicialmente, o fruto apresenta crescimento lento, que é a fase de chumbinho (96 aos 126 DAF); logo após, acontece um rápido crescimento, é a fase do crescimento acelerado (127 aos 158 DAF); a partir dos 159 dias após o florescimento, o fruto continua a crescer, porém de forma menos acelerada (crescimento lento), passando pelo período de granação, até atingir a maturação; após a penúltima observação (279 DAF) ocorre a fase regressiva, na qual o fruto desidrata-se na própria planta e perde massa, passando a maturação seca (CUNHA; VOLPE, 2011), o que explica a queda de massa fresca na última observação e corresponde à fase M_5 da Figura 1.

Na Tabela 11 são apresentadas as estimativas dos parâmetros com os respectivos intervalos de confiança assintóticos, considerando os erros independentes e variâncias homogêneas (sem ponderação). Quando comparados os intervalos de

confiança das Tabelas 5, 8 e 11 com os intervalos de confiança das Tabelas 3, 6 e 9, respectivamente, percebe-se que ponderar e considerar erros autorregressivos tornou as estimativas mais precisas, com intervalos de confiança menores, o que justifica o uso destes fatores e corrobora os resultados obtidos por autores como Mazzini et al. (2005), Mendes et al. (2008) e Savian e Muniz (2007).

Tabela 11 Estimativas para os parâmetros dos modelos Gompertz e Logístico considerando erros independentes e sem ponderação, com seus respectivos intervalos de confiança assintóticos de 95%, no ajuste ao acúmulo de massa fresca dos frutos das faces norte e sul da planta, no alinhamento de plantio III- (66° - 246°).

	Gompertz			Logístico		
	LI	estimativa	LS	LI	estimativa	LS
Face Norte						
α	0,9596	1,0339	1,1332	0,9177	0,9947	1,0904
γ	3,4770	4,4972	5,8784	5,7107	7,5087	10,2374
k	0,0213	0,0280	0,0369	0,0319	0,0432	0,0602
Face Sul						
α	0,8895	0,9794	1,1119	0,8528	0,9460	1,0713
γ	3,2068	4,6394	6,9908	5,1945	7,6025	12,3626
k	0,0201	0,0298	0,0455	0,0295	0,0453	0,0765

4.4 Considerações finais

Os dois modelos não lineares estudados apresentaram resultados satisfatórios na descrição do crescimento do fruto do cafeeiro por meio da massa fresca. Inclusive, as estimativas para a data em que o fruto atinge a metade da sua massa fresca, obtidas por meio dos parâmetros do modelo Logístico e considerando que a cultivar Obatã IAC 1669-20 apresenta desenvolvimento do fruto mais tardio, estão de acordo com as fases de desenvolvimento do fruto (escala fenológica) presentes na literatura (CAMARGO; CAMARGO, 2001; MORAIS et al., 2008; PEZZOPANE et al., 2003; SÁGIO, 2009).

Perante os avaliadores de qualidade de ajuste utilizados, o modelo Gompertz foi o que melhor descreveu o acúmulo de massa fresca no fruto do cafeeiro em todos os alinhamentos de plantio estudados e para as diferentes faces de exposição ao sol. Estes resultados indicam que o crescimento do fruto do cafeeiro não é simétrico em relação ao ponto de inflexão, característica do modelo Logístico, ou seja, o ponto de inflexão ocorre antes que o fruto atinja a metade do seu peso assintótico ($\frac{\alpha}{2}$). Isso significa dizer que quando a metade do peso máximo (em massa fresca) do fruto do cafeeiro é atingida, as taxas de crescimento já atingiram seu máximo (ponto de inflexão) e estão decrescendo.

Os resultados obtidos para as medidas de curvatura de Bates e Watts em todos os alinhamentos (Tabelas 4, 7 e 10) evidenciam a escolha do modelo Gompertz como o melhor modelo, pois apresenta menores resultados, tanto para as medidas da não linearidade de efeito parâmetro (c^θ) quanto para a não linearidade intrínseca (c^l). Em outras palavras, tem-se que, no modelo Gompertz, as medidas de não linearidade são menores que no modelo Logístico, indicando que as inferências feitas pela aproximação linear são mais confiáveis, mesmo que o tamanho da amostra seja pequeno.

Observando-se as tabelas e as figuras apresentadas nesta seção é possível perceber diferenças entre os alinhamentos de plantio e as faces de exposição ao sol, principalmente em relação à assíntota superior “ α ” e os índices de maturidade “ k ”. Em todos os três alinhamentos estudados, os frutos da face norte apresentam maior massa fresca que os da face sul. Estes resultados corroboram o que já havia sido informado por Bicalho et al. (2005), que afirmam que, em uma mesma planta, as diferentes faces (N e S) podem se comportar até mesmo como lavouras diferentes.

Como o modelo Gompertz forneceu os melhores ajustes, foi feita uma comparação entre os alinhamentos de plantio e suas faces, utilizando as estimativas

obtidas para os parâmetros deste modelo. Tal comparação está apresentada na Tabela 12 e considerou as estimativas para a assíntota superior “ α ”, o índice de maturidade “ k ” e a data (em DAF) na qual foi alcançado o ponto de inflexão PI. Os valores em negrito são comentados com maior destaque a seguir.

Tabela 12 Comparação entre as faces norte/sul, nos três alinhamentos de plantio, com base na data em que foram alcançados o ponto de inflexão PI, as estimativas para a assíntota superior “ α ” e o índice de maturidade “ k ”.

Alinhamento I (81° - 261°)			
	PI	α	k
face N	173	1,1108	0,0241
face S	169	1,0495	0,0271
$ \Delta $	4	0,0613	0,003
Alinhamento II (51° - 231°)			
	PI	α	k
face N	172	1,0163	0,0294
face S	177	0,9265	0,0355
$ \Delta $	5	0,0898	0,0061
Alinhamento III (66° - 246°)			
	PI	α	k
face N	173	1,0085	0,0303
face S	174	1,0261	0,0246
$ \Delta $	1	0,0176	0,0057

Observando-se a Figura 2 e considerando que a trajetória aparente do sol é, aproximadamente, de leste para oeste, percebe-se que, no alinhamento de plantio I, esta trajetória é quase que sobre as linhas do cafeeiro. Logo, as diferenças entre o desenvolvimento dos frutos nas faces de exposição (Norte/Sul) devem ser as menores possíveis, pois a luz solar fica bem distribuída entre as faces, durante quase todo o período do dia (manhã e tarde). E, como pode ser observado na Tabela

12, neste alinhamento de plantio, a diferença ($|\Delta|$) entre os índices de maturidade “ k ” é menor que nos demais alinhamentos, sugerindo que os frutos apresentam desenvolvimento mais homogêneo entre as faces. Para este alinhamento de plantio também foram obtidas as maiores estimativas de assíntota superior, o que indica frutos com maior massa fresca.

No alinhamento de plantio II, as linhas do cafeeiro são quase perpendiculares em relação à trajetória do sol (Figura 2), portanto, as diferenças entre as faces de incidência solar são as maiores possíveis, como pode ser observado na Tabela 12. A diferença entre as datas em que é alcançado o ponto de inflexão é de 5 dias; a assíntota superior “ α ” também apresenta o maior $|\Delta|$ entre as faces, chegando a 0,0898g e o índice de maturidade “ k ” é mais desigual neste alinhamento.

O alinhamento de plantio III é bem semelhante ao II, porém, um pouco menos inclinado (Figura 2). Assim, a diferença entre as faces, quanto à incidência solar, é um pouco mais amena. Dessa forma, o $|\Delta|$ do índice de maturidade é menor que no alinhamento II, mas ainda é significativo, se comparado ao primeiro alinhamento de plantio, no qual a luz solar se distribui quase que uniformemente entre as faces.

Os parâmetros do modelo estatístico conseguiram diferenciar a frutificação do cafeeiro, implantados em diferentes orientações cardeais, em função do período (manhã e tarde) de maior incidência solar em determinada face da planta. O alinhamento de plantio II, que foi o mais perpendicular à trajetória do sol e, portanto, aquele com as maiores diferenças de intensidade luminosa entre as duas faces da planta (considerando os períodos da manhã e tarde), apresentou maior diferença entre as datas em que é alcançado o ponto de inflexão, entre as estimativas para assíntota superior “ α ” e entre os índices de maturidade “ k ”, o que reflete em uma maturação mais desigual entre os dois lados da planta.

5 CONCLUSÃO

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que:

i) os modelos não lineares apresentaram bons ajustes, tendo a incorporação da dependência residual (AR(1)) e ponderação por pesos estimados sido eficientes fornecendo estimativas mais confiáveis;

ii) o alinhamento de plantio I ($81^\circ - 261^\circ$) apresentou assíntota superior maior que nos demais alinhamentos, sugerindo que, neste direcionamento de plantio, os frutos apresentam maior acúmulo de massa fresca;

iii) as faces de exposição ao sol (norte/sul) apresentaram diferentes comportamentos, principalmente no alinhamento de plantio II, que é o mais perpendicular em relação à trajetória do sol, quanto ao peso máximo do fruto, ao índice de maturidade e à data na qual é alcançada a metade da massa fresca. Logo, influenciam no crescimento e desenvolvimento do fruto;

iv) o ajuste do modelo Gompertz foi mais adequado que o do Logístico para todas as situações de crescimento de fruto, sendo indicado como o melhor modelo para a descrição do acúmulo de massa fresca do fruto do cafeeiro cv. Obatã IAC 1669-20.

REFERÊNCIAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v. 19, n. 6, p. 716-723, 1974.
- ALP, A. et al. Age and growth of the European catfish (*Silurus glanis*) in a Turkish Reservoir and comparison with introduced populations. **Reviews in Fish Biology and Fisheries**, London, v. 21, n. 1, p. 283-294, June 2011.
- ALPIZAR, E.; BERTRAND, B. Incidence of elevation on chemical composition and beverage quality of coffee in Central America . In: INTERNATIONAL CONFERENCE IN COFFEE SCIENCE, 20., 2004, Bangalore. **Proceedings...** Bangalore: ASIC, 2004. 1 CD ROM.
- AMABILE, R. F.; GUIMARÃES, D. P.; FARIAS NETO, A. L. Análise de crescimento de girassol em Latossolo com diferentes níveis de saturação por bases no cerrado. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 38, n. 2, p. 219-224, fev. 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE INDÚSTRIA DO CAFÉ. **O café no Brasil**. Disponível em: <<http://www.abic.com.br/publique/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm>>. Acesso em: 8 maio 2012.
- BARBOSA, J. N. et al. Spatial distribution of coffees from Minas Gerais state and their relation with quality. **Coffee Science**, Lavras, v. 5, n. 3, p. 237-250, 2010.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. Relative curvature measures of nonlinearity: with discussion. **Journal of the Royal Statistical Society, Serie B**, London, v. 42, n. 1, p. 1-25, 1980.
- BERGAMASCO, A. F.; AQUINO, L. H.; MUNIZ, J. A. Ajuste de modelos não-lineares a dados de crescimento de fêmeas da raça holandesa. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 25, n. 2, p. 235-241, mar./abr. 2001.

BERILLI, S. S. et al. Avaliação da taxa de crescimento de frutos de mamão (*Carica Papaya* L.) em função das épocas do ano e graus dia acumulados. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 29, n. 1, p. 11-14, 2007.

BERTALANFFY, L. Quantitative laws in metabolism and growth. **Quantitative Review of Biology**, Chicago, v. 32, p. 230-270, Sept. 1957.

BICALHO, G. O. D. et al. Direcionamento das linhas de plantio em diferentes orientações cardeais e seus reflexos sobre a produtividade de cafeeiros. In: SIMPÓSIO DE PESQUISA DOS CAFÉS DO BRASIL, 1., 2005, Londrina. **Anais...** Brasília: EMBRAPA Café, 2005. Disponível em: <<http://www.sbicafe.ufv.br/handle/10820/1446>>. Acesso em: 25 out. 2012.

BORGES, M. E. E.; MAZUCHELI, J. Avaliação do poder de alguns testes de homogeneidade de variâncias. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 1., 2010, Campinas. **Anais...** Campinas: UNICAMP, 2010. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/sinape/19sinape/node/749>>. Acesso em: 21 maio 2012.

BREUSCH, T.; PAGAN, A. Teste simples para heterocedasticidade e coeficiente de variação aleatória Econométrica. **Sociedade Econométrica**, Rio de Janeiro, v. 47, p. 1287-1294, 1979.

BRODY, S. **Bioenergetics and growth**. New York: Reinhold, 1945. 1023 p.

BRUNA, E. D. Curvas de crescimento de pêssego em regiões subtropicais. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 29, n. 3, p. 685-689, 2007.

CAMARGO, A. P.; CAMARGO, M. B. P. Definição e esquematização das fases fenológicas do cafeeiro arábica nas condições tropicais do Brasil. **Bragantia**, Campinas, v. 60, n. 1, p. 65-68, 2001.

CASTIGLIONI, D. S.; BARCELOS, D. F.; SANTOS, S. Crescimento de *Aegla longirostri* Bond-Buckup & Buckup (Crustacea, Anomura, Aeglidae). **Revista Brasileira de Zoologia**, Porto Alegre, v. 23, n. 2, p. 408-413, 2006.

CAVALINI, F. C. et al. Maturity indexes for “Kumagai” and “Paluma” guavas. **Revista Brasileira de Fruticultura**, Jaboticabal, v. 28, n. 2, p. 176-179, 2006.

CLOWES, M. S. J. Study of the growth of *Coffea arabica* L. fruits in Rhodesia. **Rhodesian Journal of Agricultural Research**, Salisbury, v. 15, p. 89-93, 1977.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO. **Acompanhamento da Safra Brasileira: avaliação da safra agrícola cafeeira 2011/2012, primeira estimativa janeiro/2012**. Brasília, 2012. 18 p.

CONSELHO DOS EXPORTADORES DE CAFÉ DO BRASIL. **Resumo das exportações de café, 2011**. Disponível em: <<http://www.cecafe.com.br/>>. Acesso em: 7 jun. 2012.

CORDEIRO, G. M.; PRUDENTE, A. A.; DEMÉTRIO, C. G. B. Uma revisão dos modelos normais não-lineares. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 27, n. 3, p. 360-393, 2009.

CUNHA, A. R.; VOLPE, C. A. Curvas de crescimento do fruto de cafeeiro cv. Obatã IAC 1669-20 em diferentes alinhamentos de plantio. **Semina: Ciências Agrárias**, Londrina, v. 32, n. 1, p. 49-62, 2011.

CUNHA, L. S. **Modelos de regressão para a descrição de crescimento de frutos da ameixeira**. 2011. 79 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária)- Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. 3rd ed. New York: J. Wiley, 1998. 706 p.

ESPIGOLAN, R. et al. Comparação de modelos não-lineares utilizando pesos de novilhos da raça Hereford. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 21., 2009, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: UNESP, 2009. Disponível em: <<http://prope.unesp.br/xxi-cic/trabalhos.htm>>. Acesso em: 10 maio 2012.

FAYAD, J. A. et al. Crescimento e produção do tomateiro cultivado sob condições de campo e de ambiente protegido. **Horticultura Brasileira**, Brasília, v. 19, n. 3, p. 232-237, jul./set. 2001.

FERNANDES, A. L. T. et al. Efeitos do direcionamento Norte-Sul (NS), Leste-Oeste (LO), Nordeste-Sudeste (NO-SL) e Noroeste-Sudoeste (NL-SO) das linhas de plantio do cafeeiro nos altiplanos do cerrado com altitudes superiores a 900m. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISAS CAFEEIRAS, 27., 2001, Uberaba. **Anais...** Rio de Janeiro: MAPA/PROCAFÉ, 2001. 1 CD-ROM.

FREITAS A. R. Curvas de crescimento na produção animal. **Revista Brasileira de Zootecnia**, Viçosa, MG, v. 34, n. 3, p. 786-795, maio/jun. 2005.

GAZOLA, S. et al. Proposta de modelagem não-linear do desempenho germinativo de sementes de milho híbrido, **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 41, n. 4, p. 551-556, abr. 2011.

GBANGBOCHE, A. B. et al. Comparison of non-linear growth models to describe the growth curve in West African Dwarf sheep. **Animal**, Cambridge, v. 2, n. 7, p. 1003-1012, 2008.

GEROMEL, C. **Metabolismo da sacarose em frutos do café**. 2006. 101 p. Tese (Doutorado em Biologia Vegetal) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

GOMIERO, L. M.; CARMASSI, A. L.; BRAGA, F. M. S. Crescimento e mortalidade de *Brycon opalinus* (Characiformes, Characidae) no Parque Estadual da Serra do Mar, Mata Atlântica, Estado de São Paulo. **Biota Neotropica**, Campinas, v. 7, n. 1, p. 21-26, 2007.

GUEDES, M. H. P. et al. Estudo das curvas de crescimento de cordeiros das raças Santa Inês e Bergamácia considerando Heterogeneidade de variâncias. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 28, n. 2, p. 381-388, mar./abr. 2004.

HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão: uma introdução a econometria**. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1998. 379 p.

LAVIOLA, B. G. et al. Acúmulo de nutrientes em frutos de cafeeiro em quatro altitudes de cultivo: cálcio, magnésio e enxofre. **Revista Brasileira de Ciência do Solo**, Campinas, v. 31, n. 6, p. 1451-1462, maio 2007.

LYRA, G. B. et al. Modelo de crescimento Logístico e exponencial para o milho BR 106, em três época de plantio. **Revista Brasileira de Milho e Sorgo**, Sete Lagoas, v. 7, n. 3, p. 211-230, 2008.

MAIA, E. et al. Método de comparação de modelos de regressão não-lineares em bananeiras. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 39, n. 5, p. 1380-1386, set./out. 2009.

MARTINS FILHO, S. et al. Abordagem bayesiana das curvas de crescimento de duas cultivares de feijoeiro. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, n. 6, p. 1516-1521, nov./dez. 2008.

MAZUCHELI, J.; ACHCAR, J. A. Algumas considerações em regressão não-linear. **Acta Scientiarum**, Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, 2002.

MAZUCHELI, J.; SOUZA, R. M.; PHILIPPSEN, A. S. Modelo de crescimento de Gompertz na presença de erros normais heterocedásticos: um estudo de caso. **Revista Brasileira de Biometria**, São Paulo, v. 29, n. 1, p. 91-101, 2011.

MAZZINI, A. R. de A. et al. Análise da curva de crescimento de machos Hereford. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 27, n. 5, p. 1105-1112, set./out. 2003.

_____. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autoregressivos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 422-427, mar./abr. 2005.

MENDES, P. N. et al. Modelo logístico difásico no estudo do crescimento de fêmeas da raça Hereford. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 38, n. 7, p. 1984-1990, out. 2008.

MORAIS, H. et al. Escala fenológica detalhada da fase reprodutiva de *Coffea arabica*. **Bragantia**, Campinas, v. 67, n. 1, p. 693-699, 2008.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. **Análise de séries temporais**. São Paulo. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 538 p.

MUNIZ, J. A.; SAVIAN, T. V.; SCALON, J. D. Parameters estimation in the model for *in situ* degradability of Mertens and Loften. **Ciência e Agrotecnologia**, Lavras, v. 32, n. 5, p. 1622-1628, set./out. 2008.

NIETO, L. M.; SILVA, L. O. C.; GONDO, A. Análise da curva de crescimento do perímetro escrotal de touros canchim em diferentes sistemas de criação. **Arquivos de Ciências Veterinárias e Zoologia**, Umuarama, v. 9, n. 2, p. 99-103, 2006.

OLIVEIRA, L.; BRANDÃO, A. J. V.; BASSANEZI, R. C. Modelo de von Bertalanffy generalizado aplicado ao crescimento de suínos de corte. **Revista Biomatemática**, Campinas, v. 17, p. 101-109, ago. 2007.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B. A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, Development and Aging**, Lakeland, v. 58, n. 1, p. 33-39, 1994.

PEREIRA, J. M.; MUNIZ, J. A.; SILVA, C. A. Nonlinear models to predict Nitrogen mineralization in an oxisol. **Scientiae Agricola**, Piracicaba, v. 62, n. 4, p. 395-400, 2005.

PEREIRA, R. G. F. A. **Efeito da inclusão de grãos defeituosos na composição química e qualidade do café (*Coffea arabica* L.) "Estritamente Mole"**. 1997. 96 p. Tese (Doutorado em Agronomia) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 1997.

PEZZOPANE, J. R. M. et al. Escala para avaliação de estádios fenológicos do cafeeiro arábica. **Bragantia**, Campinas, v. 62, n. 3, p. 499-505, 2003.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. New York: Springer, 2000. 528 p.

PRADO, T. K. L. **Modelos não-lineares no crescimento de frutos de coqueiro**. 2011. 91 p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2011.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2012. Disponível em: <<http://www.r-project.org>>. Acesso em: 12 jun. 2012.

RATKOWSKI, D. A. **Nonlinear regression modeling: a unified practical approach**. New York: M. Dekker, 1983. 153 p.

RENA, A. B.; MAESTRI, M. Fisiologia do cafeeiro. **Informe Agropecuário**, Belo Horizonte, v. 11, p. 26-40, 1985.

RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Elmsford, v. 10, p. 290-300, 1959.

SÁGIO, S. A. **Características fisiológicas e bioquímicas de duas cultivares de café de ciclos de maturação precoce e tardio**. 2009. 46 p. Dissertação (Mestrado em Fisiologia Vegetal) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2009.

SANCHES, C. F. M.; JAFELICE, R. S. M. Modelo de Bertalanffy para uma espécie de crustáceo. **FAMAT em Revista**, Uberlândia, n. 4, p. 63-67, 2005.

SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. A study of in situ degradability: heterogeneity of variances and correlated errors. **Scientiae Agricola**, Piracicaba, v. 64, n. 5, p. 548-554, set./out. 2007.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New Jersey: J. Wiley, 1989. 752 p.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality. **Biometrika**, Cambridge, v. 52, n. 3/4, p. 591-611, 1965.

SILVA, F. L. et al. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. **Pesquisa Agropecuária Brasileira**, Brasília, v. 46, n. 3, p. 262-271, mar. 2011.

SOUZA, E. M. et al. Modelagem não linear da extração de zinco em um solo tratado com lodo de esgoto. **Acta Scientiarum Technology**, Maringá, v. 32, n. 2, p. 193-199, 2010.

SOUZA, F. V. **Curva de crescimento e exportação de nutrientes e sódio por frutos de mangueira Palmer, Haden e Tommy Atkins**. 2007. 54 p. Dissertação (Mestrado em Ciência do Solo) - Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal, 2007.

TEI, F.; SCAIFE, A.; AIKMAN, D. P. Growth of lettuce, onion and red beet: 1., growth analysis, light interception, and radiation use efficiency. **Annals of Botany**, London, v. 78, n. 5, p. 633-643, 1996.

TERRA, M. F.; MUNIZ, J. A.; SAVIAN, T. V. Ajuste dos modelos Logístico e Gompertz aos dados de crescimento de frutos da tamareira-anã (*Phoenix roebelenii* O'BRIEN). **Magistra**, Cruz das Almas, v. 22, n. 1, p. 1-7, 2010.

THOLON, P.; QUEIROZ, S. A. Modelos matemáticos utilizados para descrever curvas de crescimento em aves aplicados ao melhoramento genético animal. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 39, n. 7, p. 2261-2269, out. 2009.

TREVISAN, A.; SANTOS, S. Crescimento de *Aegla manuinflata* (Decapoda, Anomura, Aeglidae) em ambiente natural. **Iheringia, Série Zoologia**, Porto Alegre, v. 101, n. 4, p. 336-342, 2011.

WINSOR, C. P. The Gompertz curve as a growth curve. **Proceedings of the National Academy of Science**, Washington, v. 18, p. 1-17, 1932.

ZEVIANI, W. M. et al. Modelos não lineares para a liberação de potássio de esterco animal em latossolos. **Ciência Rural**, Santa Maria, v. 42, n. 10, p. 1789-1796, out. 2012.

ANEXOS

```
#####
##### Rotina em R utilizada para obtenção das estimativas #####
##### dos parâmetros, testes estatísticos e geração de gráficos ##
#####
rm(list=ls())
library(car)
library(nlme)
library(qpcR)
library(lmtest)
# carregando os dados
dados<-read.table("dados.csv", head=T)
dados
daf<-dados$daf
mfn1<-dados$mfn1
mfn2<-dados$mfn2
mfn3<-dados$mfn3
mfs1<-dados$mfs1
mfs2<-dados$mfs2
mfs3<-dados$mfs3

# Alinhamento 81° 261° FACE NORTE

##### Análise de Resíduos #####

#Gompertz
mod=nls(mfn1~(alfa*exp(-exp(gama-(k*daf))))),
start=c(alfa=1.5,gama=3,k=0.02))
shapiro.test(residuals(mod)) # Normalidade

MG=attr(mod$m$fitted(),"gradient")
mlg=lm(mfn1~-1+MG)
bptest(mlg) # Homocedasticidade
durbin.watson(mlg) # Independência

# Para o modelo Logístico e os demais alinhamentos o procedimento
# foi o mesmo descrito acima.

#####
##### Obtenção de estimativas iniciais - Gompertz #####
#####

yg=log(-1*log(mfn1/2))
modg=lm(yg~daf)
summary(modg)
```

```

bg=coef(modg)[1];bg # Estimativa inicial do parâmetro gama
gmg=coef(modg)[2]
gg=-1*gmg;gg # Estimativa inicial do parâmetro k

# A estimativa inicial do parâmetro alfa é sempre um pouco maior
# que o maior dos valores da variável dependente.

#####
## Ajuste Gompertz, ponderado ##
#####

mod=gnls(mfn1~(alfa*exp(-exp(gama-(k*daf))))),
start=c(alfa=1.5,gama=3,k=0.02), weights=varExp(form=~daf))
summary(mod)
confint(mod)
shapiro.test(mfn1-fitted(mod))
AIC(mod)

# calculando o R2
SQR=sum((mfn1-fitted(mod))^2) #QMe= SQR/11
SQT= sum(mfn1*mfn1) - (sum(mfn1)^2)/length(mfn1)
R=1-SQR/SQT ; R
R2a= 1 - (((1-R)*(14))/(11)); R2a
# R2 calculado direto, pacote qpcR
Rsq(mod)
Rsq.ad(mod)

# Curvatura de Bates e Watts
expcurv=deriv3(~(alfa*exp(-exp(gama-(k*daf))))),
c("alfa","gama","k"), function(alfa,gama,k,daf)NULL)
reg=nls(mfn1~expcurv(alfa,gama,k,daf),
start=c(alfa=1.06,gama=4.5,k=0.02))
rms.curv(reg)

##### GRÁFICO #####
yest=fitted(mod)
ep=sqrt(SQR/11)
# intervalo de confiança para o gráfico
LS= yest+qt(0.975,11)*ep # o valor 11 é o grau de liberdade,
LI= yest-qt(0.975,11)*ep # pois são 14 obs e 3 parâmetros

plot(daf,mfn1,pch=16, xlab="dias após florecimento (DAF)",
ylab="massa fresca do fruto (g)", ylim=c(-0.15,1.25),las=1)
lines(daf,yest, lwd=2,col="green")
lines(daf, LS, col="red", lty=3)
lines(daf, LI, col="red", lty=3)
legend(200,0.2, c("Intervalo de Confiança", "Gompertz - Norte"),
lty=c(3,1),pch=c("",""), col=c("red", "green"), cex=.75)

```

```
#####  
  
#####  
##### Ajuste Logístico, ponderado e considerando AR1. #####  
#####  
  
aju=gnl(mfn1~((alfa)/(1 + exp(gama - k*daf))),  
start=c(alfa=1.5,gama=3,k=0.015), weights=varExp(form=~daf),  
correlation=corAR1())  
summary(aju)  
  
# E repete a mesma idéia do modelo Gompertz apresentado anteriormente.  
# Para os demais alinhamentos o procedimento foi o mesmo descrito acima.  
#####
```